Estimation d'une mesure de risque dans le cas de pertes extrêmes

PAR

Jonathan EL METHNI

en collaboration avec

Laurent GARDES & Stéphane GIRARD

LTHE Lundi 18 Juin 2012

LABORATOIRE JEAN KUNTZMANN
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - INFORMATIQUE
Mistis
Inria informatiques mathématiques
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
LTHE

Résultat fondamental de la Théorie des valeurs extrêmes

Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ un échantillon d'observations indépendantes issues d'une variable aléatoire Y ayant pour fonction de répartition F.

Théorème [Fisher et Tippett (1928) et Gnedenko (1943)]

Sous certaines conditions de régularité sur la fonction de répartition F, il existe un paramètre réel γ et deux suites $(a_n)_{n\geq 1} > 0$ et $(b_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\max(Y_1, \ldots, Y_n) - b_n}{a_n} \leq y\right) = \mathcal{H}_\gamma(y),$$

avec

$$\mathcal{H}_\gamma(y) = \begin{cases} \exp\left(-(1+\gamma y)_+^{-1/\gamma}\right) & \text{if } \gamma \neq 0, \\ \exp\left(-e^{-y}\right) & \text{if } \gamma = 0, \end{cases}$$

où $z_+ = \max(0, z)$.

Domaine d'attraction de Fréchet

- $\mathcal{H}_\gamma$ est appelée fonction de répartition de la loi des valeurs extrêmes.
- Si F verifie le théorème de Fisher-Tippett-Gnedenko, alors on dit que F appartient au domaine d'attraction de $\mathcal{H}_\gamma$.
- γ est appelé indice des valeurs extrêmes.

Lois à queues lourdes : $\gamma > 0$

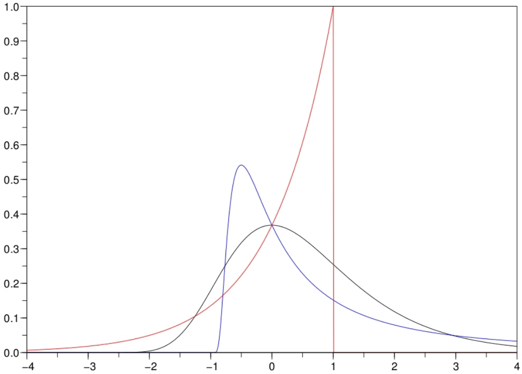
Toute fonction de répartition appartenant au domaine d'attraction de Fréchet peut se réecrire

$$\overline{F}(y) = y^{-1/\gamma}\ell(y),$$

avec $\overline{F} = 1 - F$ et où $\gamma > 0$ et $\ell(.)$ est une fonction à variations lentes à l'infini *i.e.* $\forall\lambda \geq 1$,

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\ell(\lambda y)}{\ell(y)} \to 1.$$

Trois domaines d'attraction



Densité de la loi des valeurs extrêmes pour $\gamma = -1$, $\gamma = 0$ et $\gamma = 1$

Mesure de risque

Approche historique

Variance ou écart-type : Markowitz (1952),

Mesure de risque

Approche historique

Variance ou écart-type : Markowitz (1952),

Definition

Soit Y une variable aléatoire désignant un montant de perte. On appelle mesure de risque une fonction $\mathcal{R}$ associant à Y une valeur positive ou nulle telle que

$$\mathcal{R} : Y \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$$

$\mathcal{R}(Y)$ représente le capital à détenir pour faire face aux pertes Y.
De grandes valeurs de $\mathcal{R}(Y)$ indiqueront que Y est “dangereux”.

Mesure de risque

Approche historique

Variance ou écart-type : Markowitz (1952),

Definition

Soit Y une variable aléatoire désignant un montant de perte. On appelle mesure de risque une fonction $\mathcal{R}$ associant à Y une valeur positive ou nulle telle que

$$\mathcal{R} : Y \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$\mathcal{R}(Y)$ représente le capital à détenir pour faire face aux pertes Y.
De grandes valeurs de $\mathcal{R}(Y)$ indiqueront que Y est "dangereux".

Exemples de mesures de risque $\mathcal{R}$:

- Value-at-Risk,
- Conditional Tail Expectation.

Value-at-Risk

Definition

La plus utilisée des mesures de risque est la Value-at-Risk (1993). La Value-at-Risk au niveau de confiance $\alpha \in]0,1[$ notée $VaR(\alpha)$ est définie par

$$VaR(\alpha) = \overline{F}^{-1}(\alpha)$$

où $\overline{F}^{-1}(.)$ est l'inverse de la fonction de survie de Y.

Remarque

On notera que la $VaR(\alpha)$ représente le quantile d'ordre α noté $q(\alpha)$ de la fonction de survie de la variable aléatoire Y. On peut ainsi écrire

$$\alpha = \mathbb{P}(Y \geq VaR(\alpha)) \iff VaR(\alpha) = q(\alpha)$$

Value-at-Risk

L'idée derrière le concept de la *VaR* est la suivante

On fixe un seuil probabiliste α et on définit une valeur $VaR(\alpha)$ qui sera acceptable ssi la probabilité que la catastrophe survienne est plus petite que α.

- La *VaR* fournit une information ponctuelle et ne prend pas en compte l'importance du risque lorsque qu'il survient mais seulement sa fréquence.
- La *VaR* ne fait pas la différence entre une catastrophe qui coûtera 1 Million ou 1 Milliard d'euros, elle sous estime les pertes.
- On peut voir la $VaR(\alpha)$ comme le montant d'extra capital qu'une entreprise a besoin afin de réduire à α la probabilité de faire faillite.

Un des principaux reproches fait à la *VaR* et que des v.a à queue légères et à queues lourdes (Embrechts et al. 1997) peuvent avoir la même $VaR(\alpha)$.

Conditional Tail Expectation

Definition

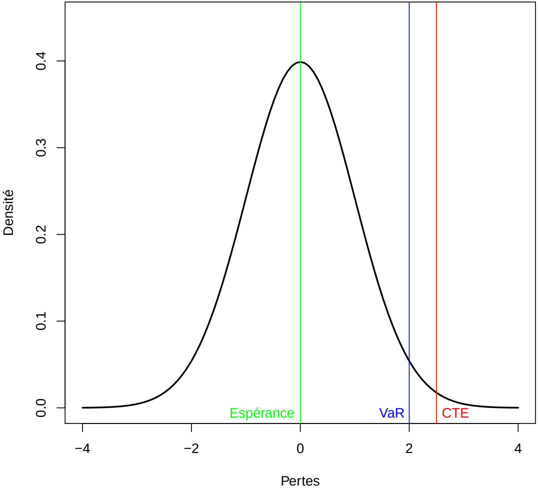
La Conditional Tail Expectation (CTE) au niveau de confiance $\alpha \in]0, 1[$ est une mesure de risque définie par

$$CTE(\alpha) = \mathbb{E}(Y|Y > VaR(\alpha))$$

- Dans la littérature elle est aussi appellée Tail-Conditional-Expectation, Average-Value-at-Risk, Expected Shortfall ou Tail-Value-at-Risk.
- La $CTE(\alpha)$ est la perte attendue sachant que la $VaR(\alpha)$ est dépassée, *i.e. "la perte moyenne dans les pires* $(1-\alpha)\%$ *des cas".*
- *La CTE consiste à déterminer l'extra capital nécessaire afin de surmonter en moyenne les pire exercices.*

Cette mesure de risque, donne des informations sur la distribution de Y au delà de la $VaR(\alpha)$ et donc contrairement à la $VaR(\alpha)$, sur l'épaisseur de la queue de distribution.

VaR et CTE



Mesure de risque cohérente

Pour répondre à la nécessité de principes théoriques et pratiques, Artzner et al. (1999) ont introduit la notion de mesure de risque cohérente.

Definition

Une mesure de risque $\mathcal{R}$ est dite cohérente si, pour deux v.a X et Y, elle satisfait les propriétés suivantes :

- Monotonie : si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\mathcal{R}(X) \leq \mathcal{R}(Y)$,
- Homogénéité positive : $\mathcal{R}(aX) = a\mathcal{R}(X)$, pour tout $a > 0$,
- Invariance par translation : $\mathcal{R}(X + b) = \mathcal{R}(X) + b$, pour tout $b > 0$,
- Sous-additivité : $\mathcal{R}(X + Y) \leq \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(Y)$.

Mesure de risque cohérente

Pour répondre à la nécessité de principes théoriques et pratiques, Artzner et al. (1999) ont introduit la notion de mesure de risque cohérente.

Definition

Une mesure de risque $\mathcal{R}$ est dite cohérente si, pour deux v.a X et Y, elle satisfait les propriétés suivantes :

- Monotonie : si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\mathcal{R}(X) \leq \mathcal{R}(Y)$,
- Homogénéité positive : $\mathcal{R}(aX) = a\mathcal{R}(X)$, pour tout $a > 0$,
- Invariance par translation : $\mathcal{R}(X + b) = \mathcal{R}(X) + b$, pour tout $b > 0$,
- Sous-additivité : $\mathcal{R}(X + Y) \leq \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(Y)$.

- La *Var* n'est pas une mesure de risque cohérente (sous-additivité non nécessairement vérifiée).
- La *CTE* est une mesure de risque cohérente.

Nouveautés de ce travail

Contributions

L'apport nouveau de ce travail consiste en l'ajout de deux difficultés supplémentaires dans le cadre de l'estimation de la *CTE* des pertes pour des lois à queues lourdes

1. On ajoute la présence d'une covariable $X \in \mathbb{R}^p$.
2. On s'intéresse à l'estimation de la *CTE* des pertes extrêmes pour des lois à queues lourdes.

$\Longrightarrow$ Pour cela on remplace α par une suite $\alpha_n \to 0$ quand la taille de l'échantillon $n \to \infty$.

L'estimation de la *VaR* des pertes extrêmes en présence d'une covariable pour des lois à queues lourdes a déjà été faite par Daouia et al. (2010).

Introduction d'une covariable

1 Lois à queues lourdes en présence d'une covariable

Soient $\{(X_i, Y_i), i = 1, \ldots, n\}$ des copies indépendantes du couple aléatoire $(X, Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ où Y est une variable d'intérêt associée à une covariable X.

$$\forall y > 0, \quad \text{on a} \quad \overline{F}(y|x) := 1 - F(y|x) = y^{-1/\gamma(x)} \ell(y|x)$$

où

- $\gamma(.)$ est une fonction inconnue et positive de la covariable x appelée indice de queue conditionnel (Gardes et Girard (2008)).
- $\ell(.|x)$ est une fonction à variations lentes à l'infini normalisée. On a (à x fixé), pour tout $\lambda > 0$,

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\ell(\lambda y|x)}{\ell(y|x)} = 1.$$

Cette hypothèse revient à supposer que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est à queue lourde.

Mesure de risque conditionnelle extrême

1 Quantile conditionnel

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ la fonction $q(\alpha|x) = \overline{F}^{-1}(\alpha|x)$ est appelée quantile conditionnel.
- On peut ainsi définir $VaR(\alpha|x) = q(\alpha|x)$ comme étant la Value-at-Risk conditionnelle.

2 Quantile conditionnel extrême

- On dit de $q(\alpha|x)$ ou de la $VaR(\alpha|x)$ qu'ils sont extrêmes si leur ordre $\alpha = \alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Objectif

On cherche donc à estimer

$$CTE(\alpha_n|x) = \mathbb{E}(Y|Y > VaR(\alpha_n|x), X = x)$$

avec $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Définitions et notations

Rappel

1. $VaR(\alpha|x) = \overline{F}^{-1}(\alpha|x)$
2. $CTE(\alpha_n|x) = \mathbb{E}(Y|Y > VaR(\alpha_n|x), X = x)$

Définition

On définit l'espérance conditionnelle d'ordre $a \geq 0$ de Y sachant $X = x$ par

$$\varphi_a(y|x) = \mathbb{E}\left(Y^a \mathbb{I}\{Y > y\}|X = x\right),$$

où $\mathbb{I}\{.\}$ est la fonction indicatrice.

1. On a $\varphi_0(y|x) = \overline{F}(y|x)$ et donc $VaR(\alpha|x) = \overline{F}^{-1}(\alpha|x) = \varphi_0^{-1}(\alpha|x)$.
2. Ainsi on a

$$CTE(\alpha_n|x) = \frac{1}{\alpha_n}\varphi_1(\varphi_0^{-1}(\alpha_n|x)|x).$$

Choix des estimateurs

Estimateur de $\varphi_a(.|x)$

Pour estimer l'espérance conditionnelle d'ordre $a \geq 0$ de Y sachant $X = x$, on utilise un estimateur à noyau défini pour $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ par

$$\widehat{\varphi}_{a,n}(y|x) = \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) Y_i^a \mathbb{I}\{Y_i > y\} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

- La fonction $K(.)$ appelée noyau est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^p$ de support S inclus dans la boule unité.
- (h_n) est une suite non aléatoire telle que $h_n = h \to 0$ quand $n \to \infty$ appelée paramètre de lissage.

Estimateur de $\varphi_a^{-1}(.|x)$

Comme $\hat{\varphi}_{a,n}(.|x)$ est une fonction décroissante on donc peut définir un estimateur de $\varphi_a^{-1}(.|x)$ par $\hat{\varphi}_{a,n}^{-1}(\alpha|x)$.

Propriétés asymptotiques

Définition

On propose donc d'estimer $CTE(\alpha_n|x)$ avec $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$ par

$$\widehat{CTE}_n(\alpha_n|x) = \frac{1}{\alpha_n}\hat{\varphi}_{1,n}(\hat{\varphi}_{0,n}^{-1}(\alpha_n|x)|x).$$

Propriétés asymptotiques

Définition

On propose donc d'estimer $CTE(\alpha_n|x)$ avec $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$ par

$$\widehat{CTE}_n(\alpha_n|x) = \frac{1}{\alpha_n}\hat{\varphi}_{1,n}(\hat{\varphi}_{0,n}^{-1}(\alpha_n|x)|x).$$

Théorème : Normalité asymptotique de $\widehat{CTE}_n(\alpha_n|x)$

Supposons que certaines hypothèses soient vérifiées, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $g(x) > 0$ et $\gamma(x) < 1/2$, on a

$$\sqrt{nh^p\alpha_n}\left(\frac{\widehat{CTE}_n(\alpha_n|x)}{CTE(\alpha_n|x)} - 1\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\|K\|_2^2}{g(x)}\frac{2(1-\gamma(x))\gamma(x)^2}{1-2\gamma(x)}\right)$$

Simulations

On génère un échantillon $\{(X_i, Y_i), i = 1, \ldots, n\}$ de taille $n = 1000$ où la covariable $X \hookrightarrow U[0,1]$ et $Y|X = x$ est distribué selon une loi issue du modèle de Hall :

$$\overline{F}(y|x) = y^{-1/\gamma(x)} \underbrace{\left(a + aby^{\rho/\gamma(x)}\right)}_{\ell(y|x)}$$

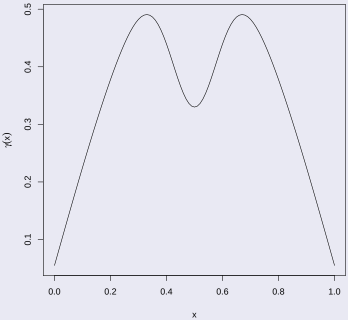
avec $a > 0, b \in \mathbb{R}^*, \rho \leq 0$ et $0 < \gamma(x) < 1/2 \quad \forall x \in [0,1]$.

- On a choisi pour valeurs $\rho = -1$, $a = 1/2$ et $b = 1$.
- On a choisi un noyau bi-quadrique $K(u) = \frac{15}{16}(1 - u^2)^2 \mathbb{I}_{\{|u| \leq 1\}}$.
- Pour le paramètre de lissage $h = 0.1$.
- On a fixé l'ordre du quantile $\alpha = 0.05$.

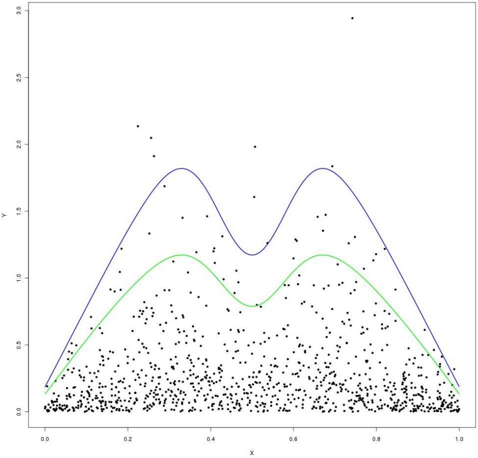
Indice de queue conditionnel

La fonction indice de queue conditionnel choisie est

$$x \in [0,1] \to \gamma(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} + \sin(\pi x)\right)\left(\frac{11}{10} - \frac{1}{2}\exp\left(64\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)\right)$$

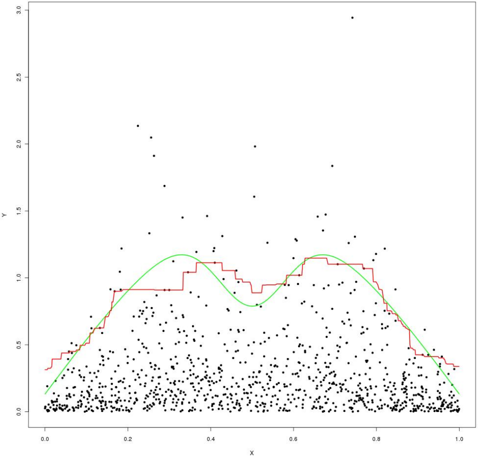


$CTE(\alpha|x)$ et $VaR(\alpha|x)$ théoriques



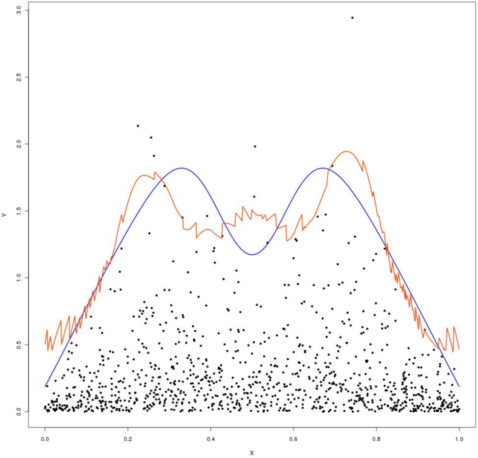
$CTE(\alpha|x)$ et $VaR(\alpha|x)$ théoriques avec une échelle logarithmique

$VaR(\alpha|x)$ théorique et estimé



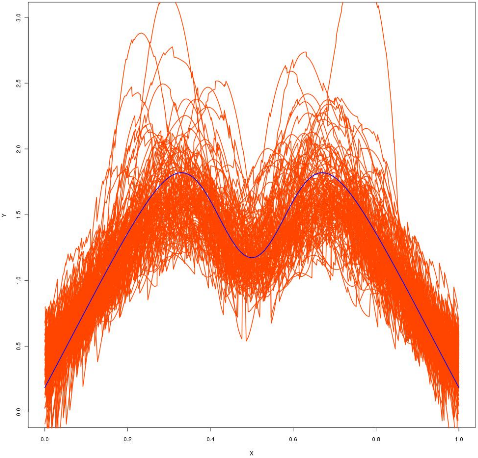
$VaR(\alpha|x)$ théorique et estimé avec une échelle logarithmique

$CTE(\alpha|x)$ théorique et estimée



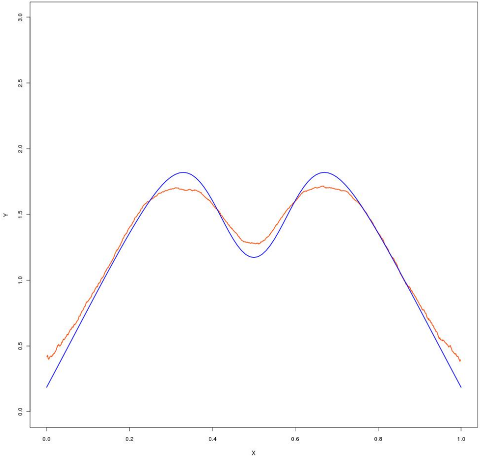
$CTE(\alpha|x)$ théorique et estimée avec une échelle logarithmique

100 échantillons et $CTE(\alpha|x)$ théorique



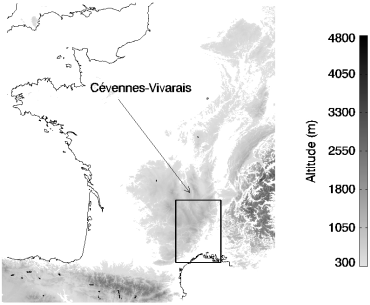
$CTE(\alpha|x)$ théorique et estimée avec une échelle logarithmique

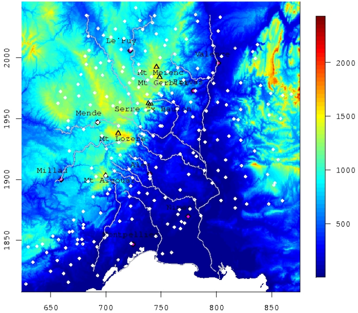
$CTE(\alpha|x)$ théorique et moyenne des 100 $CTE(\alpha|x)$ estimées



$CTE(\alpha|x)$ théorique et estimée avec une échelle logarithmique

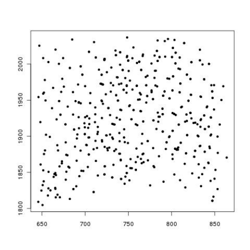
La région des Cévennes-Vivarais





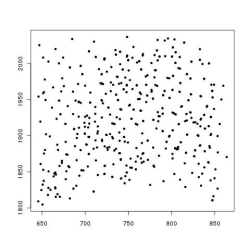
Interpolation par noyau

472 Stations

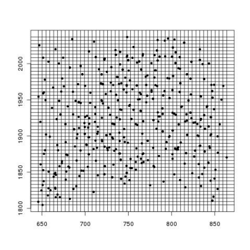


Interpolation par noyau

472 Stations

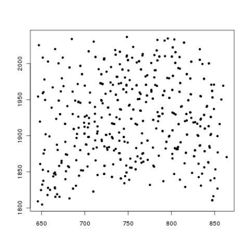


Grille de 2500 points

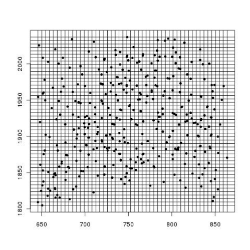


Interpolation par noyau

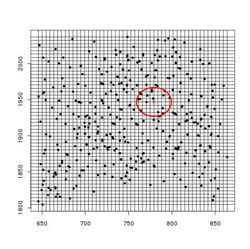
472 Stations



Grille de 2500 points



Travail dans la $B(x, h_n)$



Conclusions et perspectives

1. Perspectives à court terme
   - Choix du paramètre de lissage h (par exemple par validation croisée).
   - Continuer les simulations sur d'autres lois (exemple : Loi de Burr).

2. Perspectives à long terme
   - Estimer la *VaR* et la *CTE* pour des ordres très petits sur le jeu de données réelles issue de la pluviométrie.
   - Etude du cas $1/2 < \gamma(x) < 1$.

Principales références

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M. et Heath, D. (1999). Coherent measures of risk, *Mathematical finance*, **9(3)**, 203–228.
- Collomb, G. (1980). Estimation non paramétrique de probabilités conditionnelles, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **291**, 427–430.
- Daouia, A., Gardes, L., Girard, S. et Lekina, A. (2010). Kernel estimators of extreme level curves, *Test*, **20**, 311–333.
- Embrechts, P., Kluppelberg, C. et Mikosh, T. (1997). Modelling Extremal Events, *Springer editions*.
- Gardes, L. et Girard, S. (2008). A moving window approach for nonparametric estimation of the conditional tail index, *Journal of Multivariate Analysis*, **99**, 2368–2388.
- Markowitz, H. M. (1952). Portfolio selection, *Journal of Finance*, **7**, 77–91.

Principales références

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M. et Heath, D. (1999). Coherent measures of risk, *Mathematical finance*, **9(3)**, 203–228.
- Collomb, G. (1980). Estimation non paramétrique de probabilités conditionnelles, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **291**, 427–430.
- Daouia, A., Gardes, L., Girard, S. et Lekina, A. (2010). Kernel estimators of extreme level curves, *Test*, **20**, 311–333.
- Embrechts, P., Kluppelberg, C. et Mikosh, T. (1997). Modelling Extremal Events, *Springer editions*.
- Gardes, L. et Girard, S. (2008). A moving window approach for nonparametric estimation of the conditional tail index, *Journal of Multivariate Analysis*, **99**, 2368–2388.
- Markowitz, H. M. (1952). Portfolio selection, *Journal of Finance*, **7**, 77–91.

Merci de votre attention.