Estimation de mesures de risque dans le cas de pertes extrêmes

PAR

Jonathan EL METHNI

en collaboration avec

Stéphane GIRARD & Laurent GARDES

Workshop Lyon-Grenoble 26 Septembre 2012

Mesure de risque

Definition

Soit Y une variable aléatoire désignant un montant de perte. On appelle mesure de risque une fonction $\mathcal{R}$ associant à Y une valeur positive ou nulle telle que

$$\mathcal{R} : Y \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$\mathcal{R}(Y)$ représente le capital à détenir pour faire face aux pertes Y.
De grandes valeurs de $\mathcal{R}(Y)$ indiqueront que Y est "dangereux".

Exemples de mesures de risque $\mathcal{R}$:

- Value-at-Risk,
- Conditional Tail Expectation,
- Conditional Tail Variance.

Value-at-Risk

Definition

La plus utilisée des mesures de risque est la Value-at-Risk [1993]. La Value-at-Risk au niveau de confiance $\alpha \in]0,1[$ notée $VaR(\alpha)$ est définie par

$$VaR(\alpha) := \overline{F}^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{t, \overline{F}(t) \leq \alpha\},$$

où $\overline{F}^{\leftarrow}(.)$ est l'inverse généralisée de la fonction de survie de Y.

Remarque

On notera que la $VaR(\alpha)$ représente le quantile d'ordre α noté $q(\alpha)$ de la fonction de survie de la variable aléatoire Y. On peut ainsi écrire

$$\alpha = \mathbb{P}(Y \geq VaR(\alpha)) \iff VaR(\alpha) = q(\alpha)$$

Un des principaux reproches fait à la VaR et que des v.a à queues légères et à queues lourdes peuvent avoir la même $VaR(\alpha)$ (Embrechts et al. [1997]).

Conditional Tail Expectation

Definition

La Conditional Tail Expectation au niveau de confiance $\alpha \in]0,1[$ notée $CTE(\alpha)$ est une mesure de risque définie par

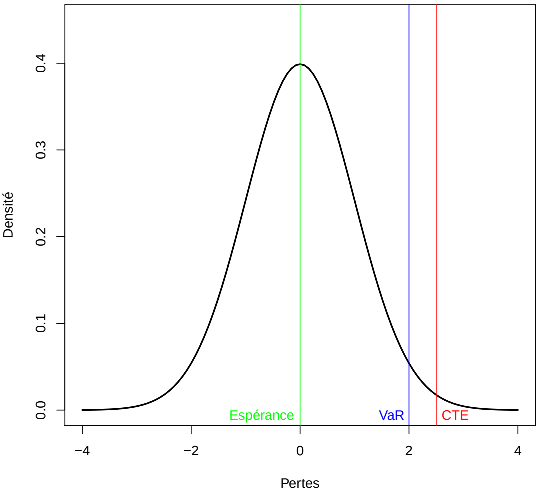
$$CTE(\alpha) = \mathbb{E}(Y|Y > VaR(\alpha)).$$

Cette mesure de risque donne des informations sur la distribution de Y au delà de la $VaR(\alpha)$ et donc contrairement à la $VaR(\alpha)$, sur l'épaisseur de la queue de distribution.

Pour répondre à la nécessité de principes théoriques et pratiques, Artzner et al. [1999] ont introduit la notion de mesure de risque cohérente.

- La VaR n'est pas une mesure de risque cohérente.
- La CTE est une mesure de risque cohérente.

VaR et CTE



Nouveautés de ce travail

Contributions

L'apport nouveau de ce travail consiste en l'ajout de deux difficultés supplémentaires dans le cadre de l'estimation de la *CTE* des pertes pour des lois à queues lourdes.

Nouveautés de ce travail

Contributions

L'apport nouveau de ce travail consiste en l'ajout de deux difficultés supplémentaires dans le cadre de l'estimation de la CTE des pertes pour des lois à queues lourdes.

1. On ajoute la présence d'une covariable $X \in \mathbb{R}^p$.

Nouveautés de ce travail

Contributions

L'apport nouveau de ce travail consiste en l'ajout de deux difficultés supplémentaires dans le cadre de l'estimation de la *CTE* des pertes pour des lois à queues lourdes.

1. On ajoute la présence d'une covariable $X \in \mathbb{R}^p$.

2. On s'intéresse à l'estimation de la *CTE* des pertes extrêmes pour des lois à queues lourdes.

$\Longrightarrow$ Pour cela on remplace α par une suite $\alpha_n \to 0$ quand la taille de l'échantillon $n \to \infty$.

Nouveautés de ce travail

Contributions

L'apport nouveau de ce travail consiste en l'ajout de deux difficultés supplémentaires dans le cadre de l'estimation de la *CTE* des pertes pour des lois à queues lourdes.

1. On ajoute la présence d'une covariable $X \in \mathbb{R}^p$.

2. On s'intéresse à l'estimation de la *CTE* des pertes extrêmes pour des lois à queues lourdes.

$\Longrightarrow$ Pour cela on remplace α par une suite $\alpha_n \to 0$ quand la taille de l'échantillon $n \to \infty$.

L'estimation de la *VaR* des pertes extrêmes en présence d'une covariable pour des lois à queues lourdes a déjà été étudiée par Daouia et al. [2010].

Introduction d'une covariable

1 Lois à queues lourdes en présence d'une covariable

Soient $\{(X_i, Y_i), i = 1, \ldots, n\}$ des copies indépendantes du couple aléatoire $(X, Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ où Y est une variable d'intérêt associée à une covariable X.

$$\forall y > 0, \quad \text{on a} \quad \overline{F}(y|x) := 1 - F(y|x) = y^{-1/\gamma(x)}\ell(y|x)$$

où

- $\gamma(.)$ est une fonction inconnue et positive de la covariable x appelée indice de queue conditionnel (Gardes et Girard [2008]).
- $\ell(.|x)$ est une fonction à variations lentes à l'infini. On a (à x fixé), pour tout $\lambda > 0$,
$$\lim_{y\to\infty} \frac{\ell(\lambda y|x)}{\ell(y|x)} = 1.$$

Cette hypothèse revient à supposer que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est à queue lourde.

Mesure de risque conditionnelle extrême

1 Quantile conditionnel

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ la fonction $q(\alpha|x) = \overline{F}^{\leftarrow}(\alpha|x)$ est appelée quantile conditionnel.
- On peut ainsi définir $VaR(\alpha|x) = q(\alpha|x)$ comme étant la Value-at-Risk conditionnelle.

Mesure de risque conditionnelle extrême

1 Quantile conditionnel

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ la fonction $q(\alpha|x) = \overline{F}^{\leftarrow}(\alpha|x)$ est appelée quantile conditionnel.
- On peut ainsi définir $VaR(\alpha|x) = q(\alpha|x)$ comme étant la Value-at-Risk conditionnelle.

2 Quantile conditionnel extrême

- On dit de $q(\alpha|x)$ ou de la $VaR(\alpha|x)$ qu'ils sont extrêmes si leur ordre $\alpha = \alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Mesure de risque conditionnelle extrême

1 Quantile conditionnel

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ la fonction $q(\alpha|x) = \overline{F}^{\leftarrow}(\alpha|x)$ est appelée quantile conditionnel.
- On peut ainsi définir $VaR(\alpha|x) = q(\alpha|x)$ comme étant la Value-at-Risk conditionnelle.

2 Quantile conditionnel extrême

- On dit de $q(\alpha|x)$ ou de la $VaR(\alpha|x)$ qu'ils sont extrêmes si leur ordre $\alpha = \alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Objectif

On cherche donc à estimer

$$CTE(\alpha_n|x) = \mathbb{E}(Y|Y > VaR(\alpha_n|X), X = x),$$

avec $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Définitions et notations

Rappel

1. $VaR(\alpha_n|x) = \overline{F}^{\leftarrow}(\alpha_n|x)$.
2. $CTE(\alpha_n|x) = \mathbb{E}(Y|Y > VaR(\alpha_n|X), X = x)$.

Définition

On définit le moment d'ordre $a \geq 0$ de Y sachant $X = x$ par

$$\varphi_a(y|x) = \mathbb{E}\left(Y^a \mathbb{I}\{Y > y\}|X = x\right),$$

où $\mathbb{I}\{.\}$ est la fonction indicatrice.

1. On a $\varphi_0(y|x) = \overline{F}(y|x)$ et donc $VaR(\alpha_n|x) = \overline{F}^{\leftarrow}(\alpha_n|x) = \varphi_0^{\leftarrow}(\alpha_n|x)$.
2. On a ainsi

$$CTE(\alpha_n|x) = \frac{1}{\alpha_n}\varphi_1(\varphi_0^{\leftarrow}(\alpha_n|x)|x).$$

Choix des estimateurs

Estimateur de $\varphi_a(.|x)$

Pour estimer le moment d'ordre $a \geq 0$ de Y sachant $X = x$, on utilise un estimateur à noyau défini pour $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ par

$$\widehat{\varphi}_{a,n}(y|x) = \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) Y_i^a \mathbb{I}\{Y_i > y\} \Big/ \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right)$$

- La fonction $K(.)$ appelée noyau est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^p$ de support S inclu dans la boule unité.
- (h_n) est une suite non aléatoire telle que $h_n = h \to 0$ quand $n \to \infty$ appelée paramètre de lissage.

Estimateur de $\varphi_a^{\leftarrow}(.|x)$

Comme $\hat{\varphi}_{a,n}(.|x)$ est une fonction décroissante on donc peut définir un estimateur de $\varphi_a^{\leftarrow}(.|x)$ par $\hat{\varphi}_{a,n}^{\leftarrow}(.|x)$.

Propriétés asymptotiques

Définition

On propose donc d'estimer $CTE(\alpha_n|x)$ avec $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$ par

$$\widehat{CTE}_n(\alpha_n|x) = \frac{1}{\alpha_n}\hat{\varphi}_{1,n}(\hat{\varphi}^{\leftarrow}_{0,n}(\alpha_n|x)|x).$$

Propriétés asymptotiques

Définition

On propose donc d'estimer $CTE(\alpha_n|x)$ avec $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$ par

$$\widehat{CTE}_n(\alpha_n|x) = \frac{1}{\alpha_n}\hat{\varphi}_{1,n}(\hat{\varphi}^{\leftarrow}_{0,n}(\alpha_n|x)|x).$$

Théorème : Normalité asymptotique de $\widehat{CTE}_n(\alpha_n|x)$

Supposons que certaines hypothèses soient vérifiées, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $g(x) > 0$ et $\gamma(x) < 1/2$, on introduit une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que $\alpha_n \to 0$ et $nh^p\alpha_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, on a alors

$$\sqrt{nh^p\alpha_n}\left(\frac{\widehat{CTE}_n(\alpha_n|x)}{CTE(\alpha_n|x)} - 1\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\|K\|_2^2}{g(x)}\frac{2(1-\gamma(x))\gamma(x)^2}{1-2\gamma(x)}\right)$$

Propriétés asymptotiques

Définition

On propose donc d'estimer $CTE(\alpha_n|x)$ avec $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$ par

$$\widehat{CTE}_n(\alpha_n|x) = \frac{1}{\alpha_n}\hat{\varphi}_{1,n}(\hat{\varphi}^{\leftarrow}_{0,n}(\alpha_n|x)|x).$$

Théorème : Normalité asymptotique de $\widehat{CTE}_n(\alpha_n|x)$

Supposons que certaines hypothèses soient vérifiées, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $g(x) > 0$ et $\gamma(x) < 1/2$, on introduit une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que $\alpha_n \to 0$ et $nh^p\alpha_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, on a alors

$$\sqrt{nh^p\alpha_n}\left(\frac{\widehat{CTE}_n(\alpha_n|x)}{CTE(\alpha_n|x)} - 1\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\|K\|_2^2}{g(x)}\frac{2(1-\gamma(x))\gamma(x)^2}{1-2\gamma(x)}\right)$$

La condition $nh^p\alpha_n \to \infty$ nous donne une restriction sur l'ordre α_n, on ne peut donc pas extrapoler.

Extrapolation

Definition

Soient $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et $(\beta_n)_{n\geq 1}$ deux suites positives telle que $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ et $0 < \beta_n < \alpha_n$. Un estimateur à noyau de type Weissman [1978] est donné par

$$\widehat{CTE}_n^W(\beta_n|x) = \widehat{CTE}_n(\alpha_n|x)\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{\hat{\gamma}_n(x)}$$

Extrapolation

Definition

Soient $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et $(\beta_n)_{n\geq 1}$ deux suites positives telle que $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ et $0 < \beta_n < \alpha_n$. Un estimateur à noyau de type Weissman [1978] est donné par

$$\widehat{CTE}_n^W(\beta_n|x) = \widehat{CTE}_n(\alpha_n|x) \underbrace{\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{\hat{\gamma}_n(x)}}_{extrapolation}$$

Extrapolation

Definition

Soient $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et $(\beta_n)_{n\geq 1}$ deux suites positives telle que $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ et $0 < \beta_n < \alpha_n$. Un estimateur à noyau de type Weissman [1978] est donné par

$$\widehat{CTE}_n^W(\beta_n|x) = \widehat{CTE}_n(\alpha_n|x) \underbrace{\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{\hat{\gamma}_n(x)}}_{extrapolation}$$

Definition (Gardes et Girard [2008])

Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite positive telle que $\alpha_n \to 0$. Un estimateur à noyau de type Hill [1975] est donné par

$$\hat{\gamma}_n^H(x) = \sum_{j=1}^{J} (\log(\hat{q}_n(\tau_j \alpha_n|x)) - \log(\hat{q}_n(\tau_1 \alpha_n|x))) \Big/ \sum_{j=1}^{J} \log(\tau_1/\tau_j),$$

où $J \geq 1$ et $(\tau_j)_{j\geq 1}$ est une suite de poids strictement positive décroissante.

Extrapolation

Théorème : Normalité asymptotique de $\hat{\gamma}_n(x)$

Supposons que certaines hypothèses soient vérifiées, on introduit une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que $\alpha_n \to 0$ et $nh^p\alpha_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, on a alors

$$\sqrt{nh^p\alpha_n}\,(\hat{\gamma}_n(x) - \gamma(x)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \gamma(x)^2 \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} V_J\right)$$

où

$$V_J = \left(\sum_{j=1}^{J} \frac{2(J-j)+1}{\tau_j} - J^2\right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{J} \log(\tau_1/\tau_j)\right)^2 .$$

Extrapolation

Théorème : Normalité asymptotique de $\widehat{CTE}_n^W(\beta_n|x)$

Supposons que certaines hypothèses soient vérifiées (Théorème 1), alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $g(x) > 0$ et $\gamma(x) < 1/2$, on introduit une suite (α_n) telle que $\alpha_n \to 0$ et $nh^p\alpha_n \to \infty$ quand $n \to \infty$. On considère $\hat{\gamma}_n(x)$ un estimateur de l'indice de queue conditionnel tel que

$$\sqrt{nh_n^p\alpha_n}(\hat{\gamma}_n(x) - \gamma(x)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, v^2(x)\right),$$

avec $v(x) > 0$. Si $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est une suite positive telle que $\beta_n \to 0$ et $\beta_n/\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a

$$\frac{\sqrt{nh_n^p\alpha_n}}{\log(\alpha_n/\beta_n)}\left(\frac{\widehat{CTE}_n^W(\beta_n|x)}{CTE(\beta_n|x)} - 1\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, v^2(x)\right).$$

Extrapolation

Théorème : Normalité asymptotique de $\widehat{CTE}_n^W(\beta_n|x)$

Supposons que certaines hypothèses soient vérifiées (Théorème 1), alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $g(x) > 0$ et $\gamma(x) < 1/2$, on introduit une suite (α_n) telle que $\alpha_n \to 0$ et $nh^p\alpha_n \to \infty$ quand $n \to \infty$. On considère $\hat{\gamma}_n(x)$ un estimateur de l'indice de queue conditionnel tel que

$$\sqrt{nh_n^p\alpha_n}(\hat{\gamma}_n(x) - \gamma(x)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, v^2(x)\right),$$

avec $v(x) > 0$. Si $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est une suite positive telle que $\beta_n \to 0$ et $\beta_n/\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a

$$\frac{\sqrt{nh_n^p\alpha_n}}{\log(\alpha_n/\beta_n)}\left(\frac{\widehat{CTE}_n^W(\beta_n|x)}{CTE(\beta_n|x)} - 1\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, v^2(x)\right).$$

La condition $\beta_n/\alpha_n \to 0$ permet d'extrapoler et donc de choisir un ordre β_n aussi petit qu'on le souhaite.

Simulations

On génère un échantillon $\{(X_i, Y_i), i = 1, \ldots, n\}$ de taille $n = 1000$ où la covariable $X \hookrightarrow U[0,1]$ et $Y|X = x$ est distribué selon une loi issue du modèle de Hall :

$$\overline{F}(y|x) = y^{-1/\gamma(x)} \underbrace{a(1 + by^{\rho/\gamma(x)})}_{\ell(y|x)}$$

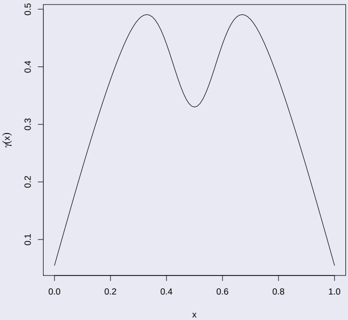
avec $a > 0, b \in \mathbb{R}^*, \rho \leq 0$ et $0 < \gamma(x) < 1/2 \quad \forall x \in [0,1]$.

- On a choisi pour valeurs $\rho = -1$, $a = 1/2$ et $b = 1$.
- On a choisi un noyau bi-quadrique $K(u) = \frac{15}{16}(1 - u^2)^2 \mathbb{I}_{\{|u| \leq 1\}}$.
- Pour le paramètre de lissage $h = 0.1$.
- On a fixé l'ordre du quantile $\alpha = 0.05$.

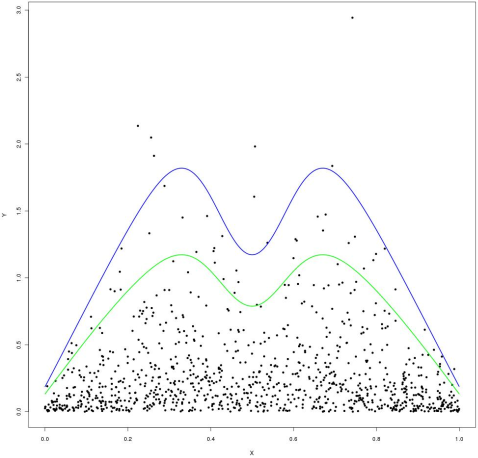
Indice de queue conditionnel

La fonction indice de queue conditionnel choisie est

$$x \in [0,1] \to \gamma(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} + \sin(\pi x)\right)\left(\frac{11}{10} - \frac{1}{2}\exp\left(64\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right)$$

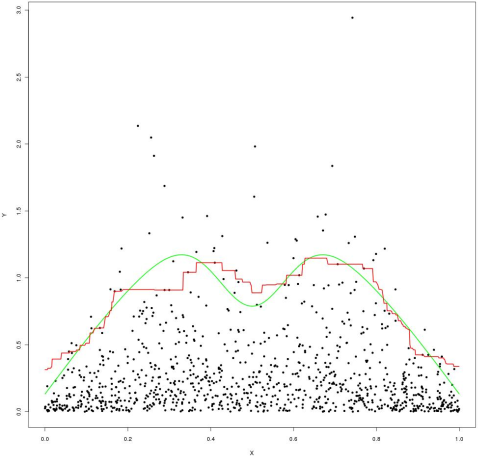


$CTE(\alpha|x)$ et $VaR(\alpha|x)$ théoriques



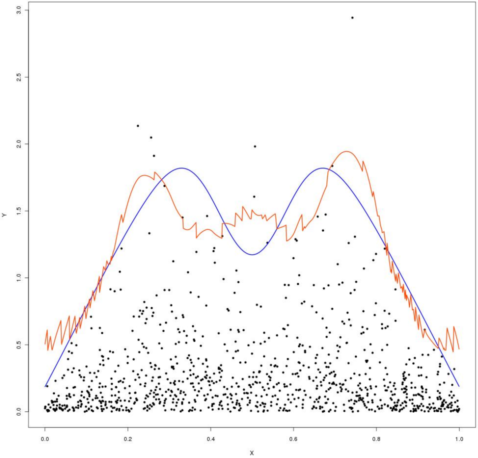
$CTE(\alpha|x)$ et $VaR(\alpha|x)$ théoriques avec une échelle logarithmique.

$VaR(\alpha|x)$ théorique et estimé



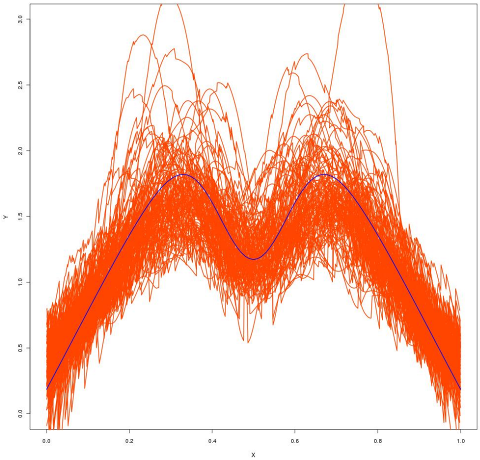
$VaR(\alpha|x)$ théorique et estimé avec une échelle logarithmique.

$CTE(\alpha|x)$ théorique et estimée



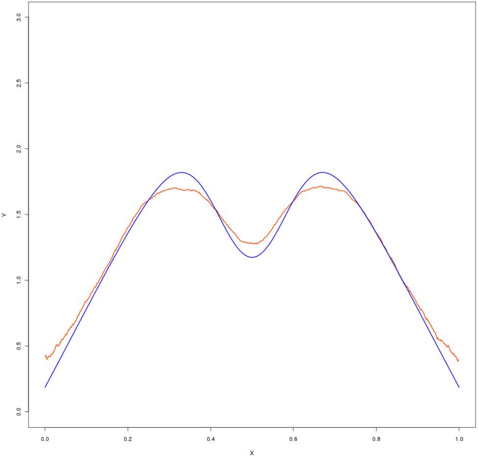
$CTE(\alpha|x)$ théorique et estimée avec une échelle logarithmique.

100 échantillons et $CTE(\alpha|x)$ théorique



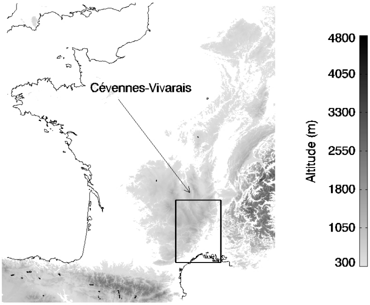
$CTE(\alpha|x)$ théorique et estimée avec une échelle logarithmique.

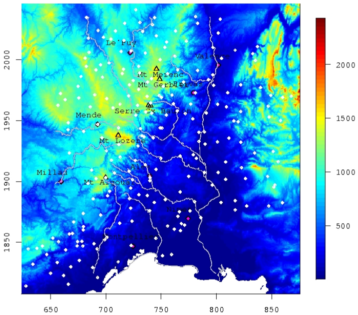
$CTE(\alpha|x)$ théorique et moyenne des 100 $CTE(\alpha|x)$ estimées



$CTE(\alpha|x)$ théorique et estimée avec une échelle logarithmique.

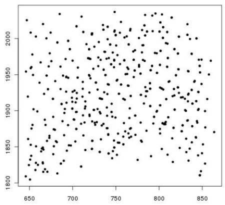
La région des Cévennes-Vivarais





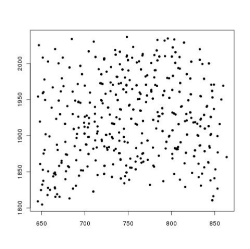
Interpolation par noyau

470 Stations

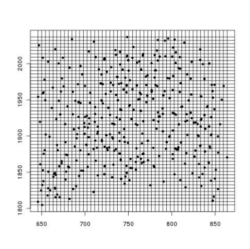


Interpolation par noyau

470 Stations

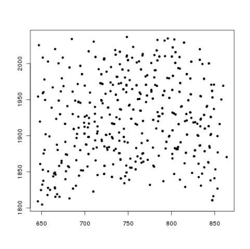


Grille de 40000 points

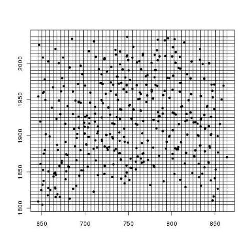


Interpolation par noyau

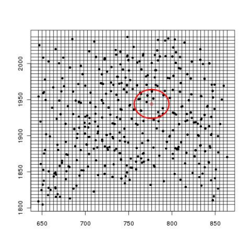
470 Stations



Grille de 40000 points

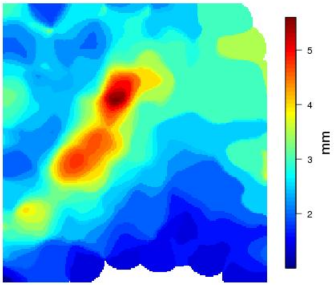


Travail dans la $B(x, h)$



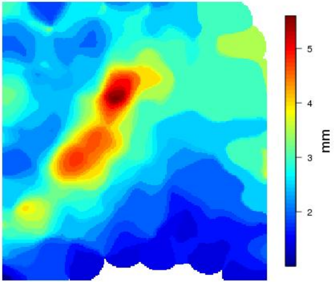
Mesures de risques non extrapolées dans la région des Cévennes-Vivarais

$\widehat{VaR}_n(0.01|x)$

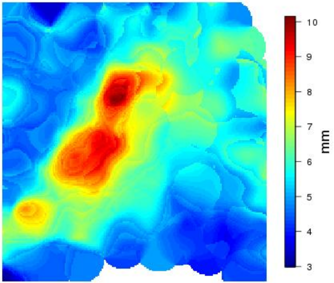


Mesures de risques non extrapolées dans la région des Cévennes-Vivarais

$\widehat{VaR}_n(0.01|x)$



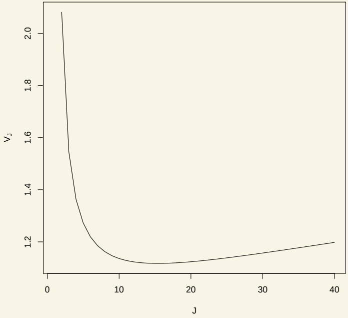
$\widehat{CTE}_n(0.01|x)$



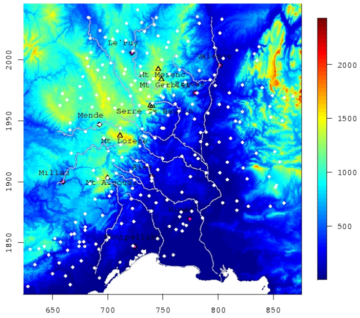
Extrapolation

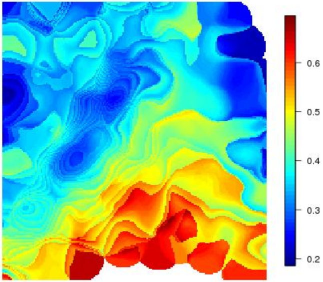
Choix de la suite de poids $(\tau_j)_{j\geq 1}$ minimisant la variance V_J

La suite de poids géométrique $\tau_j = (1/j)^{j/J}$ pour $J = 15$.



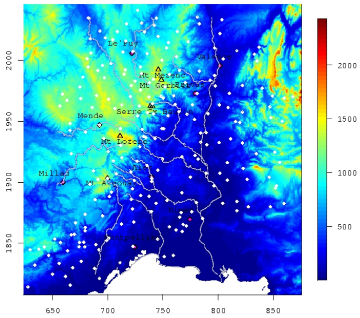
Carte de $\hat{\gamma}_n(0.01|x)$ dans la région des Cévennes-Vivarais

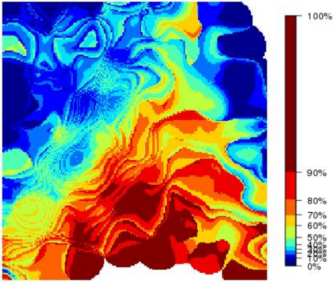




Carte de $\widehat{CTE}_n^W(1/(20 * 365.25 * 24)|x)$ pour un niveau de retour à 20 ans

Carte de $\widehat{CTE}_n^W(1/(20 * 365.25 * 24)|x)$ pour un niveau de retour à 20 ans





Conclusions et perspectives

1. Perspectives à court terme
   - Continuer les simulations sur d'autres lois (exemple : Loi de Burr).
   - Choix du paramètre de lissage h (par exemple par validation croisée).
   - Choix du paramètre α qui donne la meilleure estimation de $\gamma(x)$.

Conclusions et perspectives

1. Perspectives à court terme
   - Continuer les simulations sur d'autres lois (exemple : Loi de Burr).
   - Choix du paramètre de lissage h (par exemple par validation croisée).
   - Choix du paramètre α qui donne la meilleure estimation de $\gamma(x)$.

2. Perspectives à long terme
   - Estimer des mesures de risques (VaR et CTE) pour des ordres très petits sur le jeu de données réelles issue de la pluviométrie.
   - Lever la restriction sur $\gamma(x)$

Conclusions et perspectives

1. **Perspectives à court terme**
   - Continuer les simulations sur d'autres lois (exemple : Loi de Burr).
   - Choix du paramètre de lissage h (par exemple par validation croisée).
   - Choix du paramètre α qui donne la meilleure estimation de $\gamma(x)$.

2. **Perspectives à long terme**
   - Estimer des mesures de risques (VaR et CTE) pour des ordres très petits sur le jeu de données réelles issue de la pluviométrie.
   - Lever la restriction sur $\gamma(x) \Longrightarrow 1/2 < \gamma(x) < 1$.

Principales références

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M. et Heath, D. (1999). Coherent measures of risk, *Mathematical finance*, **9(3)**, 203–228.
- Daouia, A., Gardes, L., Girard, S. et Lekina, A. (2010). Kernel estimators of extreme level curves, *Test*, **20**, 311–333.
- Embrechts, P., Kluppelberg, C. et Mikosh, T. (1997). Modelling Extremal Events, *Springer editions*.
- Gardes, L. et Girard, S. (2008). A moving window approach for nonparametric estimation of the conditional tail index, *Journal of Multivariate Analysis*, **99**, 2368–2388.
- Hill, B.M., (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution, *The Annals of Statistics*, **3**, 1163–1174.
- Weissman, I., (1978). Estimation of parameters and large quantiles based on the k largest observations, *Journal of the American Statistical Association*, **73**, 812–815.

Merci de votre attention.

Conditional Tail Variance

Definition

La Conditional Tail Variance au niveau de confiance $\alpha \in]0,1[$ notée $CTV(\alpha)$ est une mesure de risque [2005] définie par

$$CTV(\alpha) = \mathbb{E}((Y - CTE(\alpha))^2 | Y > VaR(\alpha)).$$

Conditional Tail Variance

Definition

La Conditional Tail Variance au niveau de confiance $\alpha \in]0,1[$ notée $CTV(\alpha)$ est une mesure de risque [2005] définie par

$$CTV(\alpha) = \mathbb{E}((Y - CTE(\alpha))^2 | Y > VaR(\alpha)).$$

Modèle : Avec covariable $X = x$ pour des pertes extrêmes $\alpha_n \to 0$

$$\begin{aligned} CTV(\alpha_n|x) &= \mathbb{E}((Y - CTE(\alpha_n|x))^2 | Y > VaR(\alpha_n|x), X = x), \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \varphi_2(\varphi_0^{\leftarrow}(\alpha_n|x)|x) - CTE^2(\alpha_n|x). \end{aligned}$$

Conditional Tail Variance

Definition

La Conditional Tail Variance au niveau de confiance $\alpha \in]0,1[$ notée $CTV(\alpha)$ est une mesure de risque [2005] définie par

$$CTV(\alpha) = \mathbb{E}((Y - CTE(\alpha))^2 | Y > VaR(\alpha)).$$

Modèle : Avec covariable $X = x$ pour des pertes extrêmes $\alpha_n \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned} CTV(\alpha_n|x) &= \mathbb{E}((Y - CTE(\alpha_n|x))^2 | Y > VaR(\alpha_n|x), X = x), \\ &= \frac{1}{\alpha_n}\varphi_2(\varphi_0^{\leftarrow}(\alpha_n|x)|x) - CTE^2(\alpha_n|x). \end{aligned}$$

Définition

On propose donc d'estimer $CTV(\alpha_n|x)$ avec $\alpha_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ par

$$\widehat{CTV}_n(\alpha_n|x) = \frac{1}{\alpha_n}\hat{\varphi}_{2,n}(\hat{\varphi}_{0,n}^{\leftarrow}(\alpha_n|x)|x) - \widehat{CTE}_n^2(\alpha_n|x).$$

Propriétés asymptotiques

Théorème : Normalité asymptotique de $\widehat{CTV}_n(\alpha_n|x)$

Supposons que certaines hypothèses soient vérifiées, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $g(x) > 0$ et $\gamma(x) < 1/4$, on introduit une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que $\alpha_n \to 0$ et $nh^p\alpha_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, on a alors

$$\sqrt{nh^p\alpha_n}\left(\frac{\widehat{CTV}_n(\alpha_n|x)}{CTV(\alpha_n|x)} - 1\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} C_{\gamma(x)}\right),$$

où

$$C_{\gamma(x)} = \frac{8(1-\gamma(x))(1-2\gamma(x))(1+2\gamma(x)+3\gamma^2(x))}{(1-3\gamma(x))(1-4\gamma(x))}.$$

Propriétés asymptotiques

Théorème : Normalité asymptotique de $\widehat{CTV}_n(\alpha_n|x)$

Supposons que certaines hypothèses soient vérifiées, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $g(x) > 0$ et $\gamma(x) < 1/4$, on introduit une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que $\alpha_n \to 0$ et $nh^p\alpha_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, on a alors

$$\sqrt{nh^p\alpha_n}\left(\frac{\widehat{CTV}_n(\alpha_n|x)}{CTV(\alpha_n|x)} - 1\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} C_{\gamma(x)}\right),$$

où

$$C_{\gamma(x)} = \frac{8(1-\gamma(x))(1-2\gamma(x))(1+2\gamma(x)+3\gamma^2(x))}{(1-3\gamma(x))(1-4\gamma(x))}.$$

Remarque

Les estimateurs $\hat{\varphi}_{a,n}(.|x)$ et $\hat{\varphi}^{\leftarrow}_{a,n}(.|x)$ nous permettent de calculer le moment d'ordre a

$$\mathbb{E}\left(Y^a|Y > VaR(\alpha_n|x), X = x\right),$$

où $a \in [0, 1/\gamma(x)[$ avec $\alpha_n \to 0$.

Propriétés asymptotiques

Théorème : Normalité asymptotique de $\widehat{CTV}_n(\alpha_n|x)$

Supposons que certaines hypothèses soient vérifiées, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $g(x) > 0$ et $\gamma(x) < 1/4$, on introduit une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que $\alpha_n \to 0$ et $nh^p\alpha_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, on a alors

$$\sqrt{nh^p\alpha_n}\left(\frac{\widehat{CTV}_n(\alpha_n|x)}{CTV(\alpha_n|x)} - 1\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\|K\|_2^2}{g(x)} C_{\gamma(x)}\right),$$

où

$$C_{\gamma(x)} = \frac{8(1-\gamma(x))(1-2\gamma(x))(1+2\gamma(x)+3\gamma^2(x))}{(1-3\gamma(x))(1-4\gamma(x))}.$$

Remarque

Les estimateurs $\hat{\varphi}_{a,n}(.|x)$ et $\hat{\varphi}^{\leftarrow}_{a,n}(.|x)$ nous permettent de calculer le moment d'ordre a

$$\mathbb{E}\left(Y^a | Y > VaR(\alpha_n|x), X = x\right),$$

où $a \in [0, 1/\gamma(x)[$ avec $\alpha_n \to 0$. Restriction sur $\gamma(x)$.