

# Introduction à la statistique des valeurs extrêmes

Stéphane Girard

*INRIA Rhône-Alpes, projet Mistis*  
`http://mistis.inrialpes.fr/~girard`

*avril 2008*

# Plan

- 1 Motivation
- 2 Etude du maximum
- 3 Etude des excès
- 4 Approche semi-paramétrique
- 5 Recherches actuelles

# Plan de l'exposé

- 1 Motivation
- 2 Etude du maximum
- 3 Etude des excès
- 4 Approche semi-paramétrique
- 5 Recherches actuelles

## Exemple

La hauteur d'une rivière est modélisée par une variable aléatoire  $X$ . On dispose de  $\{X_1, \dots, X_n\}$  un échantillon de hauteurs d'eau annuelles. On note  $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$  l'échantillon ordonné.

### Deux problèmes complémentaires :

- Calculer la probabilité  $p$  d'une hauteur d'eau  $h$  extrême  $p = \mathbb{P}(X \geq h)$  avec  $h > X_{n,n}$ .
- Calculer le niveau d'eau  $h$  qui est atteint ou dépassé une seule fois sur  $T$  années avec  $T > n$ , i.e. résoudre  $1/T = \mathbb{P}(X \geq h)$ .

**Définition** de la fonction de survie :

$\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X \geq x) = 1 - F(x)$  où  $F$  est la fonction de répartition.

1) **Estimation de la queue de la fonction de survie.** Etant donné  $h$ , estimer  $p = \bar{F}(h)$  avec  $h > X_{n,n}$

2) **Estimation de quantiles extrêmes.** Etant donné  $p$ , estimer  $h$  tel que  $p = \bar{F}(h)$  avec  $p < 1/n$ , i.e. estimer  $h = \bar{F}^{-1}(p)$ .

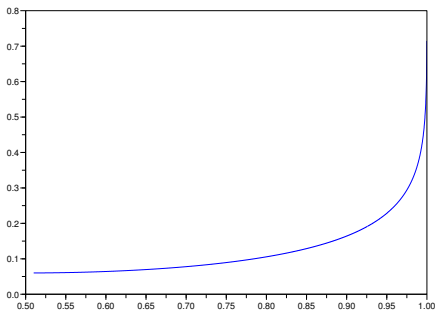
**Difficulté commune** : La fonction de survie  $\bar{F}(x)$  est inconnue et difficile à estimer au-delà du maximum ( $x > X_{n,n}$ ).

## Démarche :

- On suppose un modèle paramétrique *a priori* pour la fonction de survie :  $\bar{F} \in \{\bar{F}_\theta, \theta \in \Theta\}$ .
- On estime  $\theta$  par  $\hat{\theta}_n$ .

**Problème** : Un bon ajustement sur l'échantillon ne garantit pas une bonne modélisation au-delà du maximum.

# Illustration



En abscisse :  $p$ . En ordonnée, écart relatif entre le quantile d'ordre  $p$  calculé avec un modèle  $\mathcal{N}(0, 1)$  et Student à 4 degrés de liberté.

**Fonction de survie empirique.** On estime  $\mathbb{P}(X \geq x)$  par la proportion d'observations qui dépassent  $x$  :

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i \geq x\}$$

**Problème** :  $\hat{F}_n(x) = 0$  si  $x > X_{n,n}$ .



# Plan de l'exposé

- 1 Motivation
- 2 Etude du maximum**
- 3 Etude des excès
- 4 Approche semi-paramétrique
- 5 Recherches actuelles

# Objectif

Le **Théorème de la Limite Centrale** (TCL) donne, sous des conditions standards, la loi asymptotique de la moyenne

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

d'un échantillon  $\{X_1, \dots, X_n\}$  de variables indépendantes et identiquement distribuées :

$$\sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \right) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, 1),$$

ou en termes de fonctions de répartition (fdr)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \sqrt{n} \left( \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \right) \leq x \right) = \Phi(x),$$

où  $\Phi$  est la fdr de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Le théorème des valeurs extrêmes est un résultat similaire pour le maximum.

# Théorème des valeurs extrêmes

[Gnedenko, 43] Sous des conditions générales sur  $F$ , il existe trois paramètres  $a_n$ ,  $b_n$  et  $\gamma$  tels que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{X_{n,n} - a_n}{b_n} \leq x \right) = H_\gamma(x),$$

avec, si  $\gamma \neq 0$ ,

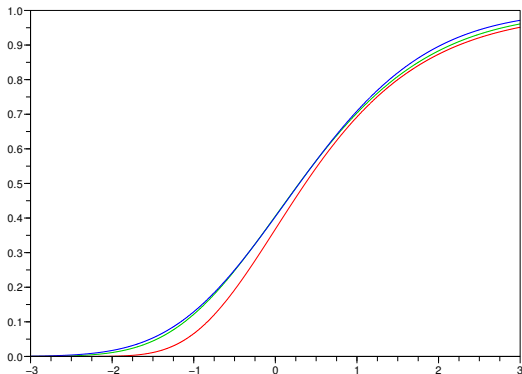
$$H_\gamma(x) = \exp \left( -(1 + \gamma x)_+^{-1/\gamma} \right)$$

où  $y_+ = \max(0, y)$  et  $H_0(x) = \exp(-e^{-x})$ .

Vocabulaire :

- $H_\gamma$  est la **loi des valeurs extrêmes (EVD)**,
- $\gamma$  est l'**indice des valeurs extrêmes**.
- $a_n$  et  $b_n$  sont des paramètres de normalisation.

# Illustration sur une loi normale



Comparaison entre  $H_\gamma(x)$ ,  $\mathbb{P}\left(\frac{X_{n,n}-a_n}{b_n} \leq x\right)$  avec  $n = 10$  et  $\mathbb{P}\left(\frac{X_{n,n}-a_n}{b_n} \leq x\right)$  avec  $n = 100$

En pratique,

$$\mathbb{P}(X_{n,n} \leq x) \simeq H_\gamma \left( \frac{x - a_n}{b_n} \right),$$

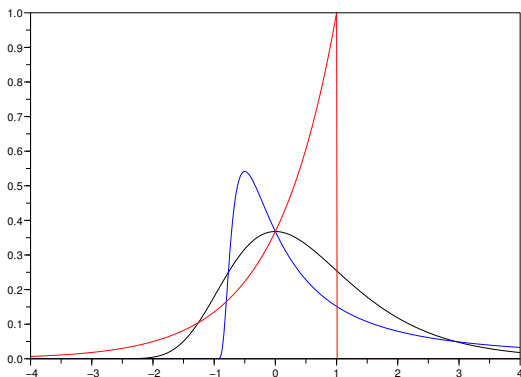
on a une loi à trois paramètres :

- $a_n$  est un paramètre de position, jouant le rôle de  $\mathbb{E}(X)$  dans le TCL,
- $b_n$  est un paramètre d'échelle, jouant le rôle de  $\sigma(X)/\sqrt{n}$  dans le TCL,
- $\gamma$  un paramètre de forme, il n'a pas d'équivalent dans le TCL.

On distingue 3 cas (donc 3 types de lois) :

- Si  $\gamma > 0$ , on dit que  $F$  appartient au domaine d'attraction de **Fréchet**,
- si  $\gamma = 0$ , on dit que  $F$  appartient au domaine d'attraction de **Gumbel**,
- si  $\gamma < 0$ , on dit que  $F$  appartient au domaine d'attraction de **Weibull**.

# Loi des valeurs extrêmes



Exemples de densités associées à la loi des valeurs extrêmes  
( $\gamma = 0$ ,  $\gamma = 1$  et  $\gamma = -1$ ).

Fréchet ( $\gamma > 0$ ).

- Ensemble des lois "à queues lourdes",  $\bar{F}(x) \rightarrow 0$  comme une puissance de  $x$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ .
- Plus précisément, on a la représentation

$$\bar{F}(x) = x^{-1/\gamma} \ell(x),$$

où  $\ell$  est une fonction à variations lentes, *i.e.*

$$\forall t > 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ell(xt)}{\ell(x)} = 1,$$

- Suites de normalisation :  $a_n = 0$  et  $b_n = \bar{F}^{-1}(1/n)$ .
- **Exemples** : Cauchy, Student, Pareto.

Gumbel ( $\gamma = 0$ ).

- Ensemble des lois "à queues légères",  $\bar{F}(x) \rightarrow 0$  exponentiellement vite lorsque  $x \rightarrow \infty$ .
- Il n'y a pas de représentation simple. Un sous-ensemble intéressant est donné par les **lois de type Weibull**

$$\bar{F}(x) = \exp\left(-x^\theta \ell(x)\right),$$

où  $\ell$  est une fonction à variations lentes et  $\theta$  s'appelle l'indice de queue de Weibull.

- Suites de normalisation :  $a_n = \bar{F}^{-1}(1/n)$  et  $b_n$  compliqué.
- **Exemples** : Normale, Log-normale, Weibull, Gamma, Exponentielle.



Weibull ( $\gamma < 0$ ).

- Ensemble des lois "à queue finie",  $\bar{F}(x) = 0$  pour  $x > x_F$ , appelé point terminal.
- On a l'équivalence avec  $F(x_F - 1/x)$  appartient au domaine d'attraction de Fréchet.
- **Exemples** : Uniforme, Beta.

# Domaines d'attraction

<b>Domaine d'attraction</b>	<b>Gumbel</b> $\gamma = 0$	<b>Fréchet</b> $\gamma > 0$	<b>Weibull</b> $\gamma < 0$
Loi	Normale Exponentielle Lognormale Gamma Weibull	Cauchy Pareto Student	Uniforme Beta

## Application à l'extrapolation

Comme  $\mathbb{P}(X_{n,n} \leq x) = F^n(x)$ , on déduit du théorème des valeurs extrêmes une approximation de  $F(x)$  pour les grandes valeurs de  $x$ ,

$$F(x) = 1 - \bar{F}(x) \simeq H_\gamma^{1/n} \left( \frac{x - a_n}{b_n} \right),$$

et en passant au logarithme

$$\log(1 - \bar{F}(x)) \simeq \frac{1}{n} \log H_\gamma \left( \frac{x - a_n}{b_n} \right).$$

Comme  $x$  est grand,  $\bar{F}(x)$  est petit, un développement limité au 1er ordre de  $\log(1 + u)$  donne donc

$$\bar{F}(x) \simeq -\frac{1}{n} \log H_\gamma \left( \frac{x - a_n}{b_n} \right).$$

## Application à l'extrapolation

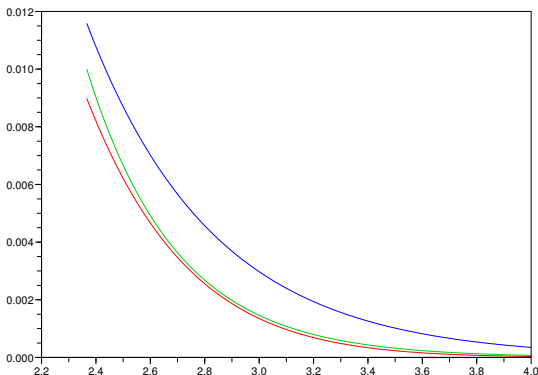
On a donc une approximation de la fonction de survie en queue :

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &\simeq \frac{1}{n} \left[ 1 + \gamma \left( \frac{x - a_n}{b_n} \right) \right]^{-1/\gamma} \quad \text{si } \gamma \neq 0 \\ &\simeq \frac{1}{n} \exp \left( -\frac{x - a_n}{b_n} \right) \quad \text{si } \gamma = 0\end{aligned}$$

et de son inverse :

$$\begin{aligned}\bar{F}^{-1}(p) &\simeq a_n + \frac{b_n}{\gamma} [(np)^{-\gamma} - 1] \quad \text{si } \gamma \neq 0 \\ &\simeq a_n - b_n \log(np) \quad \text{si } \gamma = 0.\end{aligned}$$

## Illustration sur une loi normale



Comparaison entre  $\bar{F}(x)$ ,  $\frac{1}{n} \exp\left(-\frac{x-a_n}{b_n}\right)$  avec  $n = 10$  et  $\frac{1}{n} \exp\left(-\frac{x-a_n}{b_n}\right)$  avec  $n = 100$

## Illustration sur une loi normale

Ici on a utilisé les valeurs théoriques de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $\gamma$  connues pour la loi normale centrée-réduite.

**Problème** : Les paramètres  $a_n$ ,  $b_n$  et  $\gamma$  sont inconnus dans la pratique puisqu'on ne connaît pas  $F$ , il faut les estimer.

# Estimation des paramètres de la loi des valeurs extrêmes

On souhaite estimer les paramètres de la loi des valeurs extrêmes de fdr

$$H_{\gamma,a,b}(x) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\gamma} \left( \frac{x-a}{b} \right) = \exp \left\{ - \left[ 1 + \gamma \left( \frac{x-a}{b} \right) \right]_{+}^{-1/\gamma} \right\}$$

Deux difficultés :

- Il faut un échantillon de maxima (parfois difficiles à extraire des données initiales, petit nombre d'observations utilisées).
- Les estimateurs du maximum de vraisemblance ne sont pas explicites.

## Estimateurs des moments pondérés

[Hosking, Wallis, Wood, 1985]. Soit  $\{Y_1, \dots, Y_k\}$  un échantillon de  $k$  maxima indépendants tous de fdr  $H_{\gamma,a,b}$ . On peut définir le moment pondéré d'ordre  $r$  par

$$\mu_r = \mathbb{E} [Y H_{\gamma,a,b}^r(Y)].$$

Cette quantité existe pour  $\gamma < 1$  et est donnée par

$$\mu_r = \frac{1}{r+1} \left[ a - \frac{b}{\gamma} \{1 - (r+1)^\gamma \Gamma(1-\gamma)\} \right],$$

où  $\Gamma$  est la fonction définie par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} \exp(-x) dx.$$



## Estimateurs des moments pondérés

Pour calculer  $a$ ,  $b$  et  $\gamma$ , trois moments pondérés suffisent :

$$\begin{aligned}\mu_0 &= a - \frac{b}{\gamma} \{1 - \Gamma(1 - \gamma)\} \\ 2\mu_1 - \mu_0 &= -\frac{b}{\gamma} (1 - 2^\gamma) \Gamma(1 - \gamma) \\ \frac{3\mu_2 - \mu_0}{2\mu_1 - \mu_0} &= \frac{1 - 3^\gamma}{1 - 2^\gamma}.\end{aligned}$$

En inversant ces formules, on obtient  $(a, b, \gamma)$  en fonction de  $(\mu_0, \mu_1, \mu_2)$ . Il reste à estimer ces trois moments.

## Estimateurs des moments pondérés

On remplace l'espérance par une moyenne empirique

$$\mu_r \simeq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_i H_{\gamma,a,b}^r(Y_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_{i,k} H_{\gamma,a,b}^r(Y_{i,k})$$

en ordonnant les observations. On remplace  $H_{\gamma,a,b}$  par la fdr empirique :

$$\mu_r \simeq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_{i,k} \hat{F}_k^r(Y_{i,k}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_{i,k} \left( \frac{i-1}{k} \right)^r .$$

On obtient alors un estimateur sous forme d'une combinaison linéaire :

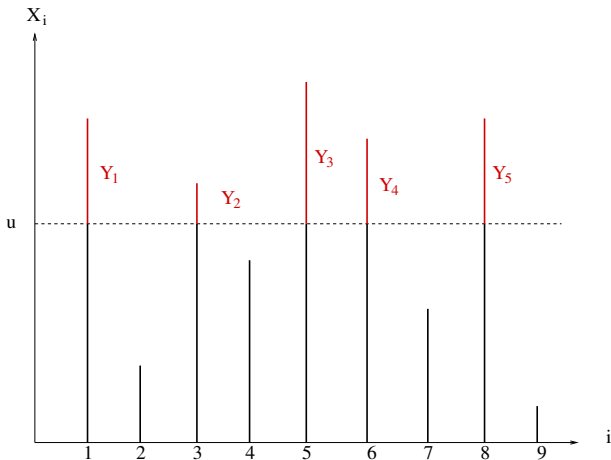
$$\hat{\mu}_r = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_{i,k} \left( \frac{i-1}{k} \right)^r .$$

# Plan de l'exposé

- 1 Motivation
- 2 Etude du maximum
- 3 Etude des excès**
- 4 Approche semi-paramétrique
- 5 Recherches actuelles

## Définition d'un excès

Plutôt que de se focaliser sur le maximum, on étudie les valeurs dépassant un seuil donné. **L'excès  $Y$  de la variable  $X$  au dessus du seuil  $u$**  est défini par  $X - u$  quand  $X \geq u$ .



## Fonction de survie d'un excès

La fonction de survie  $\bar{F}_u$  d'un excès au dessus de  $u$  est donnée pour  $y > 0$  par

$$\begin{aligned}\bar{F}_u(y) &= \mathbb{P}(Y \geq y) \\ &= \mathbb{P}(X - u \geq y | X \geq u) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq u + y, X \geq u)}{\mathbb{P}(X \geq u)} \\ &= \frac{\bar{F}(u + y)}{\bar{F}(u)}\end{aligned}$$

Lorsque le seuil est grand, on peut approcher cette quantité par la fonction de survie d'une **loi de Pareto Généralisée (GPD)**.

Sa fonction de survie est donnée par

$$\begin{aligned}\bar{G}_{\gamma,\sigma}(y) &= \left(1 + \gamma \frac{y}{\sigma}\right)^{-1/\gamma} \quad \text{si } \gamma \neq 0, \\ &= \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right) \quad \text{sinon.}\end{aligned}$$

Son ensemble de définition est  $\mathbb{R}^+$  si  $\gamma \geq 0$  ou  $[0, -\sigma/\gamma[$  si  $\gamma < 0$ .  
Elle dépend de deux paramètres :

- $\sigma > 0$  est un paramètre d'échelle,
- $\gamma \in \mathbb{R}$  est un paramètre de forme.

Deux cas particuliers :

- $\gamma = 0$ , loi exponentielle d'espérance  $\sigma$ ,
- $\gamma = -1$ , loi uniforme sur  $[0, \sigma]$ .

# Théorème de Pickands

[Pickands, 1975] Il y a équivalence entre la convergence en loi du maximum vers une EVD et la convergence en loi d'un excès vers une GPD :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{X_{n,n} - a_n}{b_n} \leq x \right) = H_\gamma(x),$$

si et seulement si

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{y \in [0, x_F - u]} |\bar{F}_u(y) - \bar{G}_{\gamma, \sigma(u)}(y)| = 0.$$

On remarque que le paramètre de forme  $\gamma$  est le même pour l'EVD et la GPD.

## Application à l'extrapolation

En utilisant le théorème de Pickands, on a, pour  $y \geq 0$ ,

$$\bar{F}_u(y) = \frac{\bar{F}(u+y)}{\bar{F}(u)} \simeq \bar{G}_{\gamma,\sigma}(y).$$

Avec le changement de variable  $x = u + y$  on obtient l'approximation (valable pour  $x \geq u$ ) :

$$\bar{F}(x) \simeq \bar{F}(u)\bar{G}_{\gamma,\sigma}(x-u).$$

Finalement, on introduit la probabilité  $\alpha$  que  $X$  dépasse  $u$ ,  $\alpha = \bar{F}(u)$ , d'où

$$\bar{F}(x) \simeq \alpha \bar{G}_{\gamma,\sigma}(x - \bar{F}^{-1}(\alpha)).$$



## Application à l'extrapolation

On a donc une approximation de la fonction de survie en queue :

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &\simeq \alpha \left[ 1 + \gamma \left( \frac{x - \bar{F}^{-1}(\alpha)}{\sigma} \right) \right]^{-1/\gamma} \quad \text{si } \gamma \neq 0 \\ &\simeq \alpha \exp \left( -\frac{x - \bar{F}^{-1}(\alpha)}{\sigma} \right) \quad \text{si } \gamma = 0\end{aligned}$$

et de son inverse :

$$\begin{aligned}\bar{F}^{-1}(p) &\simeq \bar{F}^{-1}(\alpha) + \frac{\sigma}{\gamma} \left[ \left( \frac{p}{\alpha} \right)^{-\gamma} - 1 \right] \quad \text{si } \gamma \neq 0 \\ &\simeq \bar{F}^{-1}(\alpha) - \sigma \log \left( \frac{p}{\alpha} \right) \quad \text{si } \gamma = 0.\end{aligned}$$

## Comparaison avec l'approche EVD

Les expressions sont les mêmes, il y a trois paramètres inconnus :

- l'indice des valeurs extrêmes  $\gamma$ ,
- $\sigma$  qui joue le rôle de  $b_n$  dans l'approche EVD,
- $\bar{F}^{-1}(\alpha)$  qui joue le rôle de  $a_n$  dans l'approche EVD.

**Avantages :**

- Il est plus facile d'avoir un échantillon d'excès que de maxima,
- $\bar{F}^{-1}(\alpha)$  est un quantile classique, facile à estimer par inversion de la fonction de survie empirique.

**En pratique :** on choisit  $\alpha = k/n$ , où  $k$  est le nombre d'excès, on estime  $\bar{F}^{-1}(k/n)$  par  $X_{n-k+1,n}$ ,

Il reste à estimer  $\gamma$  et  $\sigma$ .

## Estimateurs des moments pondérés

[Hosking, Wallis, 1987]. Soit  $\{Y_1, \dots, Y_k\}$  un échantillon de  $k$  excès indépendants tous de fdr  $G_{\gamma, \sigma}$ . On peut définir un autre type de moment pondéré d'ordre  $s$  par

$$\nu_s = \mathbb{E} [Y \bar{G}_{\gamma, \sigma}^s(Y)].$$

Cette quantité existe pour  $\gamma < 1$  et est donnée par

$$\nu_s = \frac{\sigma}{(s+1)(s+1-\gamma)}.$$

Pour obtenir  $\gamma$  et  $\sigma$ , deux moments suffisent

$$\gamma = \frac{4\nu_1 - \nu_0}{2\nu_1 - \nu_0} \text{ et } \sigma = \frac{2\nu_1\nu_0}{\nu_0 - 2\nu_1},$$

on estime ensuite  $\nu_0$  et  $\nu_1$  classiquement.

# Plan de l'exposé

- 1 Motivation
- 2 Etude du maximum
- 3 Etude des excès
- 4 Approche semi-paramétrique**
- 5 Recherches actuelles

On se restreint au **domaine d'attraction de Fréchet** où l'on a la caractérisation

$$\bar{F}(x) = x^{-1/\gamma} \ell(x),$$

avec  $\ell$  une fonction à variations lentes et  $\gamma > 0$ . Ce modèle de fonction de survie comporte :

- une partie paramétrique  $x^{-1/\gamma}$  ne dépendant que d'un paramètre réel ( $\gamma$ ).
- une partie non-paramétrique  $\ell(x)$  sur laquelle on sait seulement que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ell(tu)}{\ell(u)} = 1,$$

pour  $t > 1$ .

## Application à l'extrapolation

Pour  $t > 1$ ,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tu)}{\bar{F}(u)} = t^{-1/\gamma} \left( \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ell(tu)}{\ell(u)} \right) = t^{-1/\gamma}.$$

On en déduit l'approximation

$$\bar{F}(tu) \simeq \bar{F}(u)t^{-1/\gamma}.$$

En posant  $x = tu$  et  $\alpha = \bar{F}(u)$ , on a

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &\simeq \alpha \left( \frac{x}{\bar{F}^{-1}(\alpha)} \right)^{-1/\gamma} \\ \bar{F}^{-1}(p) &\simeq \bar{F}^{-1}(\alpha) \left( \frac{p}{\alpha} \right)^{-\gamma},\end{aligned}$$

pour  $x > u$  ou de façon équivalente  $p \leq \alpha$ .

## Remarques :

- Ces approximations sont des cas particuliers de l'approche GPD avec  $\sigma = \gamma \bar{F}^{-1}(\alpha)$  ;
- $\bar{F}^{-1}(\alpha)$  s'estime comme nous l'avons déjà vu par une des observations ordonnées.
- Il reste uniquement à estimer  $\gamma$ , en se basant encore sur

$$\bar{F}^{-1}(p) \simeq \bar{F}^{-1}(\alpha) \left(\frac{p}{\alpha}\right)^{-\gamma},$$

que l'on peut réécrire

$$\log \bar{F}^{-1}(p) - \log \bar{F}^{-1}(\alpha) \simeq \gamma \log(\alpha/p).$$

## Estimation semi-paramétrique de $\gamma$

On choisit comme précédemment,  $\alpha = k/n$  et on considère plusieurs valeurs de  $p = i/n$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ . (on doit avoir  $p < \alpha$ ). On obtient :

$$\log \bar{F}^{-1}(i/n) - \log \bar{F}^{-1}(k/n) \simeq \gamma \log(k/i),$$

et en estimant les fonctions de survies par leurs équivalents empiriques,

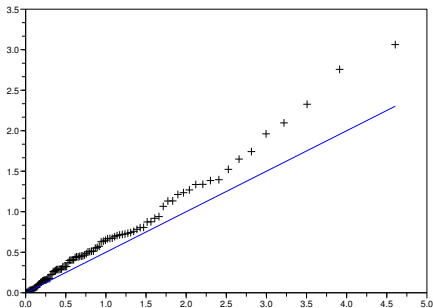
$$\log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-k+1,n} \simeq \gamma \log(k/i).$$

Il est possible de vérifier graphiquement cette approximation.



## Estimation semi-paramétrique de $\gamma$

Simulation de  $n = 500$  réalisations d'une loi de Student à 2 degrés de liberté ( $\gamma = 1/2$ ). On a choisi  $k = 100$ .



En abscisse :  $\log(k/i)$ . En ordonnée :  $y = x/2$  et  $\log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-k+1,n}$  pour  $i = 1, \dots, k - 1$ .

## Estimation semi-paramétrique de $\gamma$

En sommant de part et d'autre sur  $i = 1, \dots, k - 1$ , on obtient

$$\gamma \simeq \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-k+1,n}}{\sum_{i=1}^{k-1} \log(k/i)}$$

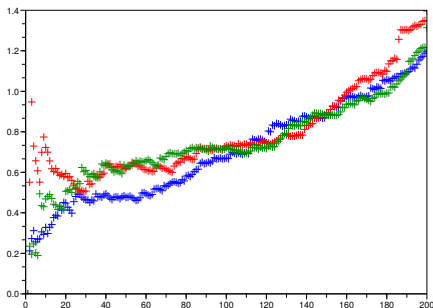
Le dénominateur se réécrit  $\log[k^{k-1}/(k-1)!]$ , en utilisant la formule de Stirling, il est équivalent à  $k$  au voisinage de l'infini. On obtient l'**Estimateur de Hill**

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} (\log X_{n-i+1,n} - \log X_{n-k+1,n}),$$

[Hill, 1975].

# Comportement de l'estimateur de Hill

Trois simulations de  $n = 500$  réalisations d'une loi de Student à 2 degrés de liberté ( $\gamma = 1/2$ ).



En abscisse :  $k$ . En ordonnée :  $\hat{\gamma}(k)$  pour  $k = 1, \dots, 200$ .

Le choix de  $k$  est difficile :

- Si  $k$  est petit,  $\hat{\gamma}(k)$  utilise peu d'observations, il a alors une **grande variance**.
- Si  $k$  est grand, le seuil estimé  $X_{n-k+1,n}$  est petit, on sort de la zône où la fonction de survie est approximativement une puissance,  $\hat{\gamma}(k)$  a alors un **grand biais**.

# Plan de l'exposé

- 1 Motivation
- 2 Etude du maximum
- 3 Etude des excès
- 4 Approche semi-paramétrique
- 5 Recherches actuelles

- **Approches semi-paramétriques** : Réduction du biais (en précisant la convergence de  $\ell(xt)/\ell(x)$  vers 1), choix automatique de  $k$ ,
- **Données non-indépendantes**,
- **Présence de covariable**,
- **Extrêmes multivariés**.

- Article fondateur :

B. Gnedenko (1943), Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *The annals of Mathematics*, 2nd Ser., **44**, 423–453.

- Moments pondérés :

J.R.M. Hosking, J.R. Wallis and E.F. Wood (1985), Estimation of the Generalized Extreme-Value distribution by the method of probability-weighted moments, *Technometrics*, **27**, 251–261.

J.R.M. Hosking and J.R. Wallis (1987), Parameter and quantile estimation for the Generalized Pareto Distribution, *Technometrics*, **29**, 1339–1349.

- Premier estimateur de l'indice des valeurs extrêmes :

B.M. Hill (1975), A simple general approach to inference about the tail of a distribution, *The Annals of Statistics*, **3**, 1163–1174.

- Livres de référence :

P. Embrechts, P., C. Klüppelberg, and T. Mikosch (1997), *Modelling extremal events*, Springer.

M. Falk, J. Hüsler and R. Reiss (2004), *Laws of small numbers : Extremes and rare events*, 2nd edition, Birkhäuser.

R. Reiss and M. Thomas (2001), *Statistical analysis of extreme values*, Birkhäuser, Basel.

N. Bingham, C. Goldie and J. Teugels (1987), *Regular variation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **27**, Cambridge University Press.