

## Chapitre 7

# Détection-estimation conjointe en IRM fonctionnelle

### 7.1. Introduction à l'imagerie cérébrale fonctionnelle

La neuroimagerie fonctionnelle a pour objet la caractérisation du cerveau en action. Son usage le plus classique consiste à faire effectuer une tâche à un individu tout en mesurant simultanément un signal induit par l'activité cérébrale.

Différentes modalités d'investigation permettent au neuroscientifique de sonder le fonctionnement cérébral tant chez le volontaire sain que chez le patient, que la pathologie soit neurodégénérative (Alzheimer), psychiatrique (schizophrénie) ou neurologique (AVC, épilepsie). Sans entrer dans une taxonomie des modalités d'imagerie, il convient d'en brosser un tableau général (voir figure 7.1) et de distinguer celles qui permettent de répondre à deux questions fondamentales, sous une forme simplifiée : *Où* et *Quand* se déroulent les processus cérébraux ? En réalité, le cerveau est une structure complexe où la spécialisation et l'intégration fonctionnelle coexistent, si bien qu'il serait illusoire de penser les fonctions cognitives comme des modules spécialisés très localisés. Parmi les outils de la neuroimagerie fonctionnelle, nous discutons rapidement les suivants :

– L'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf) consiste à mesurer, de façon non invasive, le signal BOLD<sup>1</sup> qui reflète le taux d'oxygénation du sang dans le cerveau [OGA 90]. Par un mécanisme de réponse neuro-vasculaire, l'afflux de sang oxygéné augmente dans les régions dont le métabolisme neuronal s'accroît, de façon

---

Chapitre rédigé par Philippe CIUCIU, Florence FORBES, Thomas VINCENT et Lotfi CHAARI.

1. *Blood Oxygenated Level-Dependent*.

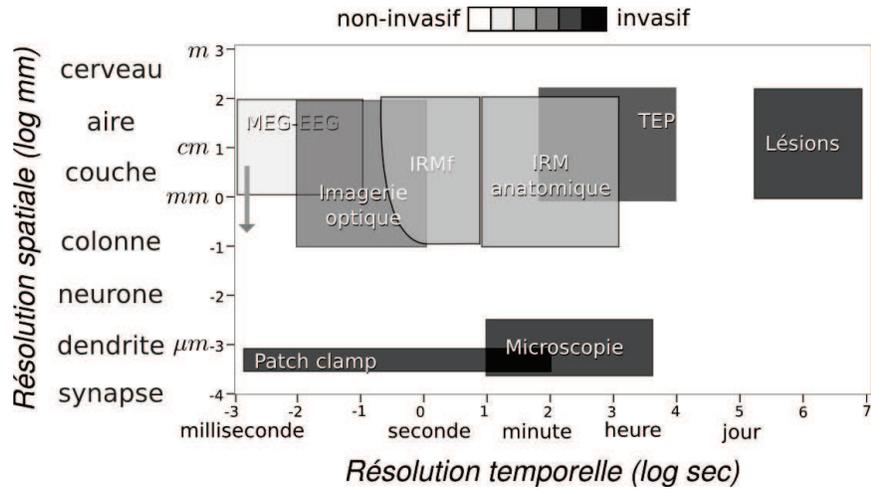


Figure 7.1 – Comparaison des différentes modalités d'imagerie cérébrale en termes de résolution spatio-temporelle et de degré d'invasivité.

bien plus importante que nécessaire. Grâce à sa bonne résolution spatiale (environ le mm), il est possible par cette méthode de connaître les régions du cerveau spécifiquement impliquées dans une tâche donnée. Depuis les années 2000 et l'émergence de l'IRMf événementielle, qui consiste à présenter les stimuli de façon isolée dans le temps, il est possible de recouvrer la dynamique du signal BOLD avec une résolution temporelle de l'ordre de la seconde. Cela reste néanmoins plus lent que la dynamique des processus cognitifs (quelques dizaines à centaines de millisecondes). Le choix de l'IRMf comme modalité d'investigation est multiple : d'une part, avec l'avènement des imageurs à très haut champ<sup>2</sup>, de l'imagerie parallèle [PRU 99, CHA 11b], et des techniques d'échantillonnage compressé [LUS 07, BOY 12], des gains importants sont encore attendus en résolution spatio-temporelle. D'autre part, l'émergence de nouveaux agents de contraste (CEST, USPIO) pourrait permettre d'atteindre une résolution moléculaire de l'ordre de celle atteinte en TEP.

– La tomographie par émission de positrons (TEP) consiste à mesurer les modifications du débit sanguin au moyen d'un traceur radioactif qu'il faut préalablement injecter par voie intraveineuse. La diffusion du traceur et la modulation du débit sanguin étant des phénomènes relativement lents, cette technique ne donne pas accès à la dynamique des mécanismes neuronaux. Son invasivité et la faible résolution temporelle des phénomènes biologiques observés en font une technique aujourd'hui de moins en moins utilisée pour l'imagerie fonctionnelle, supplantée par l'IRMf.

2. IRM à 11.7 T prévu fin 2013 à NeuroSpin.

– L'électroencéphalographie (EEG) fut la première méthode de neuroimagerie non invasive, mise au point en 1929, par le neurologue Hans Berger. Contrairement aux méthodes précédentes, c'est une mesure de l'activité électrique. L'EEG est relativement peu précise spatialement mais elle offre une bonne résolution temporelle, uniquement limitée par la vitesse de l'électronique de mesure (5 kHz) [SWA 98]. L'approche classique consiste à mesurer des potentiels évoqués : en répétant une même stimulation un grand nombre de fois, il est possible de mettre en évidence des ondes positives et négatives caractéristiques des différentes étapes du processus de traitement de l'information (*e.g.*, potentiels évoqués N100, P300, ...) [HAL 98].

– La magnétoencéphalographie (MEG) offre une information relativement similaire à l'EEG, mais elle mesure les champs magnétiques induits par l'activité cérébrale. L'intérêt de la MEG réside dans le fait que, contrairement aux champs électriques, les champs magnétiques ne sont quasiment pas déformés par leur passage au travers des tissus organiques (notamment l'interface entre le liquide céphalo-rachidien et le crâne). Tout comme avec l'EEG, il est possible *via* la résolution d'un problème inverse *linéaire* de reconstruire les sources du signal électromagnétique sur la surface corticale. Cela permet d'identifier avec une précision d'un demi centimètre les régions d'où sont émis les *champs évoqués* [SEK 05]. Ces techniques de localisation spatiale ont pris leur essor grâce aux outils de la régularisation [BAI 97] et l'avènement d'algorithmes d'optimisation efficaces [BAU 11, GRA 11].

Une étape clé dans le choix de la modalité d'imagerie réside dans la question neuroscientifique à laquelle on doit répondre. Si l'on souhaite garantir le décodage temporel de l'activité neuronale, le meilleur choix semble la MEG ou l'EEG à défaut. Si en revanche, on privilégie la localisation spatiale, l'IRMf semble plus judicieuse. Au delà de ce choix, l'obtention d'une description *fiable* de l'activité neuronale peut être améliorée, d'aborden concevant des outils de mesure (imageurs, capteurs) plus performants, puis en améliorant les méthodes d'analyse pour corriger les imprécisions ou artefacts de mesure (reconstruction robuste, débruitage, distortions, ...) ou tenir compte de modèles mathématiques plus réalistes des processus physiologiques sous-jacents.

Ce chapitre s'inscrit justement dans une problématique de restauration et de détection d'objets liés à l'activité cérébrale à partir de signaux bruités d'IRMf, en exposant une approche bayésienne pour la Détection-estimation conjointe (DEC) de l'activité cérébrale, c'est-à-dire pour la résolution d'un problème inverse spatio-temporel (3D+temps). L'approche DEC remet en cause le paradigme classique de détections des activations en IRMf en estimant la réponse impulsionnelle du système neurovasculaire plutôt qu'en la supposant connue et constante à travers tout le cerveau.

Dans la suite, nous présentons en section 7.2 la problématique de la DEC, puis l'inversion est abordée dans un cadre bayésien en section 7.3. Deux schémas d'inférence alternatifs, *i.e.*, stochastique et variationnel, sont ensuite présentés dans les sections 7.4 et 7.5, respectivement. Une comparaison des résultats fournis par ces deux

approches tant sur données simulées que réelles est menée en section 7.6, ouvrant ainsi une discussion concernant les apports de chaque formalisme en fin de chapitre.

## 7.2. Détection-estimation conjointe de l'activité cérébrale

### 7.2.1. Détection et estimation : deux questions inter-dépendantes

L'objectif de l'analyse en IRMf intra-sujet est double : d'une part, (i) *localiser* l'activité neuronale évoquée par des tâches cognitives d'intérêt au cours d'un paradigme expérimental, c'est-à-dire *détecter* les voxels activés par la stimulation, et d'autre part, (ii) *estimer* la dynamique du système neuro-vasculaire qui opère le lien entre les stimulations et les signaux BOLD mesurés, en caractérisant la Fonction de Réponse Hémodynamique (FRH) dont une forme canonique est décrite en figure 7.2. Il s'agit donc de produire des cartes d'activation ainsi qu'une description locale de la réponse induite par la stimulation, en vue de mieux comprendre le couplage neuro-vasculaire mais aussi de contribuer à un schéma dynamique du fonctionnement cérébral, en étudiant par exemple la variabilité spatiale du temps d'arrivée au pic de la réponse ou en tentant d'inférer des relations d'ordonnancement temporel entre les états d'activation.

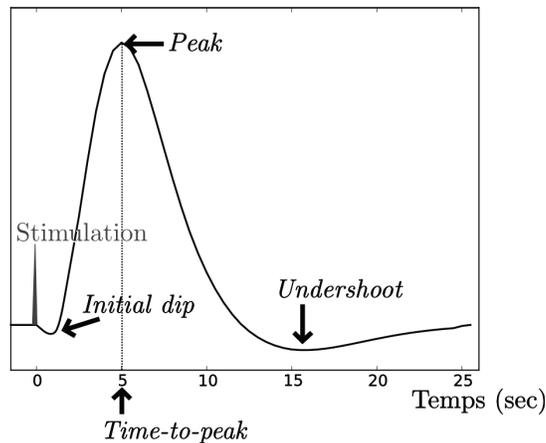


Figure 7.2 – FRH canonique et ses principales caractéristiques. Cette réponse opère un délai ainsi qu'une transformation à variation lente du signal de stimulation d'entrée. L'*initial dip* ou déplétion précoce n'est pas toujours observé et reflète une extraction immédiate d'oxygène due à l'excitation neuronale.

L'approche usuelle pour aborder ces deux questions s'appuie sur la régression multiple, encore connue sous le nom de Modèle linéaire général (MLG) [FRI 95]. Dans ce

contexte, on construit une matrice de dessin expérimental c'est-à-dire un ensemble de régresseurs représentant les décours temporels canoniques d'activation. Ces décours sont construits comme la convolution d'une FRH canonique (voir figure 7.2) avec le signal binaire déduit de chaque condition expérimentale présente dans le paradigme, c'est-à-dire du signal codant les occurrences des stimuli propres à cette condition (*e.g.*, présentation d'un visage connu) : chaque '1' indique une occurrence du stimulus. La détection est alors conduite voxel par voxel par estimation des paramètres du MLG au sens du maximum de vraisemblance et des statistiques suffisantes normalisées (*e.g.*, test de Student) sont ensuite calculées pour détecter des activations (différence d'activité ou contraste entre deux conditions expérimentales comme l'activité en réponse à des visages connus versus inconnus) en rejetant l'hypothèse nulle selon laquelle le contraste est nul, à un risque de première espèce spécifié.

Dans le cadre du MLG, l'estimation de l'hémodynamique ne peut se faire que dans les régions détectées comme activées. Ainsi, elle s'en trouve biaisée car cette détection s'est appuyée sur un modèle canonique prédéfini. Il apparaît que ces deux tâches sont fortement interdépendantes : un bon modèle de FRH est nécessaire pour construire le modèle linéaire et bien détecter les activations tandis qu'une estimation fiable de la FRH n'est disponible que dans les régions correctement détectées. Bien qu'il soit possible d'injecter une certaine flexibilité temporelle au sein du modèle linéaire [HEN 00, CAS 08] en ajoutant des régresseurs (*e.g.*, bases de fonctions [WOO 04a], dérivation et dispersion de la FRH canonique [HEN 00], modèle FIR [GOU 00], ...), il est d'usage dans les approches par MLG de n'utiliser qu'un modèle hémodynamique *fixe* pour l'ensemble du cerveau, ce qui va à l'encontre des connaissances sur le signal BOLD (voir paragraphe 7.2.2). Par ailleurs, estimer la FRH ne fait sens que dans des régions activées par une tâche spécifique, ce qui induit un biais de présélection et ne reflète pas l'activité hémodynamique sur l'ensemble du cerveau. Une approche procédant à l'estimation de la FRH voxel à voxel [MAR 03, CIU 03] permet parfois d'inférer dans un second temps les états d'activation. Cependant, cette méthodologie s'avère parfois peu robuste à cause des composantes de nuisance et du bruit prépondérants dans le signal BOLD [CIU 04].

L'idée de réaliser une détection-estimation conjointe (DEC) est apparue initialement dans [MAK 05, MAK 08], où le problème de la reproductibilité de la FRH est traité *spatialement* en adoptant une parcellisation 3D du cerveau (voir figure 7.3). L'objectif est ainsi de faire ressortir une échelle spatiale où ce filtre hémodynamique, incarné par la FRH, peut être supposé constant localement, de façon à rendre ainsi son estimation la plus robuste possible, contrairement aux tentatives voxel à voxel [DEP 08]. Il convient maintenant de formuler les hypothèses physiologiques sous-tendant le modèle retenu.

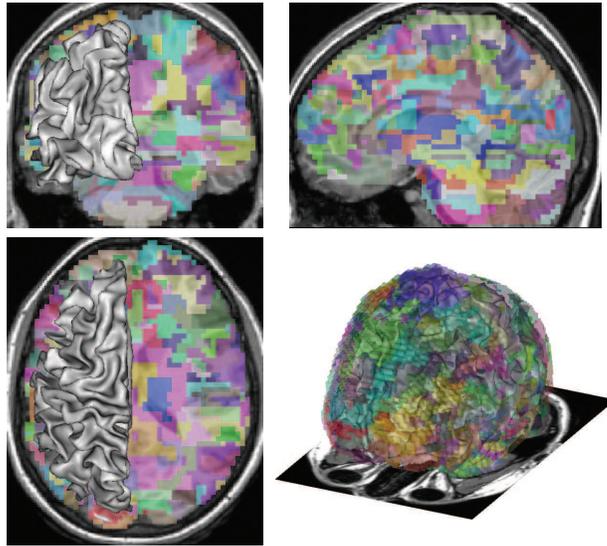


Figure 7.3 – Vues coronale, sagittale (en haut), axiale et 3D cerveau entier (en bas) d'une parcellisation intra-sujet, où une couleur code pour une parcelle, superposées à l'IRM anatomique en niveaux de gris ainsi qu'à la surface corticale (maillage gris).

### 7.2.2. Hypothèses physiologiques sur l'hémodynamique

Les caractéristiques d'intérêt du signal BOLD synthétisées ici constituent l'ensemble des connaissances *a priori* sur le signal observé [LOG 01].

$\mathcal{H}_1$ ) le signal est très *bruité* : les variations de l'activité hémodynamique évoquée par le paradigme ne représentent qu'un changement de l'ordre de 2 à 5% par rapport à la ligne de base à 3 Tesla.

$\mathcal{H}_2$ ) Il existe une *corrélation spatiale* des signaux BOLD, due aux phénomènes physiologiques observés et au fonctionnement neuronal en réseau. Ces phénomènes possèdent un support spatial plus large que la résolution spatiale des données.

$\mathcal{H}_3$ ) Le signal présente une *corrélation temporelle à courte et longue portée*. La composante à courte portée ou haute fréquence vient naturellement de la durée des phénomènes physiologiques qui dépasse la période d'échantillonnage. Parmi ceux-ci, certains sont d'intérêt car liés au paradigme, d'autres reflètent des régulations physiologiques qu'il est difficile de modéliser explicitement, de par leur nature inattendue. Elles entrent donc dans la modélisation du bruit sous la forme d'un processus aléatoire auto-corrélé temporellement [WOO 01]. La corrélation à longue portée provient en partie d'artéfacts : les pulsations respiratoires et surtout cardiaques ont des fréquences supérieures à celle de la mesure du signal. La condition de Shannon-Nyquist n'est pas satisfaite, induisant ainsi un repliement spectral des composantes cardiaques

et respiratoires sur les basses fréquences des signaux acquis. Dans sa partie très basse fréquence, la composante à longue portée est également associée à une activité cérébrale intrinsèque d'intérêt qui peut être mise en évidence en IRMf sur les réseaux fonctionnels du repos (*e.g.*, mode par défaut) [ZAR 97, LIN 01, CIU 08].

$\mathcal{H}_4$ ) Si le couplage neuro-vasculaire peut être décrit physiologiquement par le complexe neuro-vasculaire, l'origine du signal BOLD mesuré reste floue et dépend de variations de plusieurs facteurs : le volume sanguin, le débit sanguin et la concentration en déoxyhémoglobine sans que l'on puisse clairement établir les contributions de chacun [LOG 01, EKS 10].

$\mathcal{H}_5$ ) L'hémodynamique est *variable* spatialement, tant au sein d'un même sujet [MIE 00, HAN 04] qu'entre les sujets [AGU 98, BUC 98]. Les variations inter-sujets sont d'autant plus marquées que l'on considère des populations pouvant différer par l'âge [RIC 03], la pathologie ou bien la thérapeutique [DES 99].

Le modèle du ballon [BUX 98] et ses extensions [BUX 04, RIE 04] sont ceux qui d'un point de vue physiologique établissent la description la plus fine du couplage neuro-vasculaire en respectant les hypothèses  $\mathcal{H}_1$ - $\mathcal{H}_5$ . Régis par des systèmes d'équations différentielles non linéaires aux paramètres inconnus, ces modèles souffrent de problèmes d'identifiabilité et s'avèrent difficiles à mettre en pratique sur des paradigmes événementiels rapides multi-conditions. Nous considérons plutôt dans ce chapitre un modèle convolutif, plus aisément manipulable mais également à même de couvrir un plus large panel de paradigmes. Ci-dessous, nous rappelons les hypothèses temporelles caractéristiques du signal BOLD qui autorisent la mise en place de ce modèle.

### 7.2.3. *Modèle convolutif variable dans l'espace*

**Stationnarité.** La réponse BOLD est supposée *stationnaire* dans le temps c'est-à-dire ne variant pas au cours des différents essais d'un même stimulus : si l'on note  $x(t)$  un stimulus présenté à l'instant  $t$  et  $h(x(t))$  la réponse hémodynamique évoquée, alors la stationnarité indique :  $h(x(t + \Delta t)) = h(x(t))$  pour  $\Delta t$  un intervalle inter-stimulus tel que  $\Delta t > 3$  s. Dans le cas contraire, des phénomènes de saturation de la réponse entrent en jeu et la réponse devient sous-linéaire [DAL 97, BUC 98].

D'un point de vue physiologique, cette hypothèse est justifiée par la construction du paradigme où l'on veille à distribuer les essais pseudo-aléatoirement pour empêcher l'apprentissage ou l'anticipation et limiter la durée de l'expérience pour éviter la fatigue du sujet. Une seconde justification vient de la question cognitive posée : on recherche une réponse *reproductible* à travers les essais.

**Linéarité.** Le système vasculaire est supposé linéaire ce qui revient à supposer d'une part  $h(ax(t)) = ah(x(t))$  pour une amplitude  $a > 0$  du stimulus, et d'autre part qu'il

est additif vis-à-vis des conditions expérimentales, notées ici  $x_1$  et  $x_2$  :  $h(x_1(t) + x_2(t)) = h(x_1(t)) + h(x_2(t))$ . Toutefois, des phénomènes de saturation existent. Ainsi, pour un doublement de l'intensité du stimulus sonore, la réponse dans le cortex auditif ne double que dans une plage restreinte du volume en décibels.

Ces hypothèses aboutissent à un système convolutif, qui trouve en outre sa justification par le choix d'une modélisation simple mais respectueuse des hypothèses  $\mathcal{H}_1$ - $\mathcal{H}_4$ . Pour garantir une certaine souplesse, un filtre linéaire à *réponse impulsionnelle finie* (RIF) est retenu de façon à formuler son identification comme un problème d'estimation *non paramétrique*. Par ailleurs, pour tenir compte de  $\mathcal{H}_5$  tout en assurant un caractère parcimonieux et donc une plus grande robustesse d'estimation, nous avons proposé les restrictions suivantes [MAK 05, MAK 08] : « une seule forme de FRH par région caractérise le système hémodynamique, les variations locales d'activité au niveau du voxel sont ramenées à des modulations d'*amplitude* de la FRH uniquement. Le modèle découple donc la forme du filtre hémodynamique de son amplitude, induisant un système *bilinéaire*. »

Nous introduisons maintenant les notations utilisées dans la suite. Le tableau 7.1 indique les variables associées aux grandeurs d'intérêt en utilisant les conventions suivantes : vecteurs<sup>3</sup> et matrices sont notés en gras minuscules et majuscules, respectivement (*e.g.*,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{X}$ ). Les scalaires sont notés en caractères non gras minuscules et les ensembles avec des doubles-barres (*e.g.*,  $\mathbb{V}$ ), la transposition est symbolisée par <sup>t</sup>.

#### 7.2.4. Modèle génératif régional

L'approche suppose un partitionnement préalable des données *i.e.*, une parcellisation garantissant une homogénéité de l'hémodynamique au sein de chaque parcelle. Supposons donc le cerveau préalablement subdivisé en  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_\gamma)_{\gamma=1:\Gamma}$  parcelles, chacune ayant des propriétés fonctionnelles homogènes du point de vue de l'hémodynamique. Le modèle proposé sera donc inféré parcelle par parcelle, indépendamment les unes des autres.

Chaque parcelle  $\mathcal{P}_\gamma$  est définie par un ensemble connexe de voxels  $\mathbb{V}_\gamma$ . Elle possède une unique FRH  $\mathbf{h}_\gamma$  caractéristique de  $\mathcal{P}_\gamma$ , qui est ainsi considérée identique pour tous les voxels. Les niveaux d'activation  $\mathbf{A}$  sont propres à chaque voxel  $V_j$  et chaque condition expérimentale  $m$  (*cf.* hypothèse de stationnarité de la réponse BOLD). On en déduit en chaque voxel  $V_j \in \mathbb{V}_\gamma$  le modèle génératif suivant, illustré à la figure 7.4 :

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{S}_j \mathbf{h}_\gamma + \mathbf{P} \ell_j + \mathbf{b}_j, \quad \text{avec} \quad \mathbf{S}_j = \sum_{m=1}^M a_j^m \mathbf{X}_m \quad (7.1)$$

3. Toujours en colonne.

$n \in \mathbb{N}_N^* = \{1, \dots, N\}$	Index des scans
$j \in \mathbb{N}_J^*$	Index des voxels
TR	Temps de répétition : résolution temporelle des données
$\mathbb{V} = \{V_j\}_{j=1:J}$	Ensemble des voxels. Pour une analyse cerveau entier, $J \approx 5 \cdot 10^4$ . Pour une analyse régionale, $J \approx 500$ .
$m \in \mathbb{N}_M^*$	Index des conditions expérimentales
$\mathbf{y}_j = (y_{j,n})_{n=1:N} \in \mathbb{R}^N$	Signal IRMf mesuré au voxel $V_j$
$\mathbf{b}_j = (b_{j,n})_{n=1:N} \in \mathbb{R}^N$	bruit de mesure et de modèle au voxel $V_j$
$\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_j)_{j=1:J}$	Matrice $N \times J$ des données acquises pour $\mathbb{V}$
$\boldsymbol{\ell}_j = (\ell_{j,n})_{n=1:N} \in \mathbb{R}^Q$	Coefficients de la dérive basse fréquence en $V_j$
$\mathbf{L} = (\boldsymbol{\ell}_j)_{j=1:J}$	Matrice $Q \times N$ des coefficients de dérive pour $\mathbb{V}$
$\mathbf{q}^m = (q_j^m)_{j=1:J}$	Etats d'activation sur $\mathbb{V}$ associés à la condition $m$
$\mathbf{Q} = (\mathbf{q}^m)_{m=1:M}$	Matrice des états pour toutes les conditions et $\mathbb{V}$
$\mathbf{a}^m = (a_j^m)_{j=1:J}$	NRN sur $\mathbb{V}$ associés à la condition $m$
$\mathbf{A} = (\mathbf{a}^m)_{m=1:M}$	Matrice des NRN pour toutes les conditions et $\mathbb{V}$
$\mathbf{x}_m = (x_m^{dt})_{dt=0:\Delta t: \frac{N \times TR}{\Delta t}}$	Séquence codant les temps d'arrivée des stimuli de type $m$ échantillonnée sur une grille de résolution $\Delta t$
$\mathbf{h}_\gamma = (h_\gamma^{d\Delta t})_{d=0:D}$	FRH avec $\Delta t$ la période d'échantillonnage de la FRH

Tableau 7.1 – Table des notations.

où  $\mathbf{S}_j \mathbf{h}_\gamma$  constitue la somme des composantes stimulus-induites du signal BOLD. La matrice  $\mathbf{X}_m = (x_m^{n-d\Delta t})_{n=1:N}^{d=0:D}$  est binaire, de dimensions  $N \times (D + 1)$ , et code les occurrences des stimuli de la  $m$ -ième condition. Le paramètre  $\Delta t$  est la période d'échantillonnage de la FRH inconnue  $\mathbf{h}_\gamma$  dans  $\mathcal{P}_\gamma$ . Le scalaire  $a_j^m$  est l'amplitude de la réponse au voxel  $V_j$  pour la condition  $m$ . Ces poids modélisent la transition entre les stimulations et la réponse vasculaire. Ils peuvent donc être considérés comme « pré-vasculaires ». En outre, comme il est admis que l'occurrence d'un stimulus coïncide avec l'excitation neuronale, elle-même à l'origine de la réponse vasculaire, les amplitudes  $\mathbf{A}$  sont donc qualifiées de « niveaux de réponse neurale » (NRN). La matrice  $\mathbf{P}$  est une base orthogonale de fonctions basses fréquences de taille  $N \times Q$ . A chaque voxel est attaché un vecteur de poids  $\boldsymbol{\ell}_j$  afin d'estimer la dérive. L'ensemble de ces vecteurs au sein de  $\mathcal{P}_\gamma$  est regroupé dans  $\mathbf{L}$ . Finalement,  $\mathbf{b}_j$  est le vecteur de bruit en  $V_j$  dont la structure est détaillée au paragraphe 7.3.1.

### 7.3. Approche bayésienne

Le formalisme bayésien nécessite de fondre le problème dans un cadre probabiliste et l'objet principal d'intérêt est la densité jointe *a posteriori* de tous les paramètres inconnus sachant les observations  $\mathbf{Y}$ . Cette dernière permet de proposer des estimateurs des inconnues, particulièrement pour  $(\mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A})$  qui sont les plus pertinents d'un point de vue cognitif. Elle est définie par :

$$p(\mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{L}, \boldsymbol{\Theta} | \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} | \mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{L}, \boldsymbol{\theta}_0) p(\mathbf{A} | \boldsymbol{\theta}_A) p(\mathbf{h}_\gamma | \boldsymbol{\theta}_h) p(\mathbf{L} | \boldsymbol{\theta}_\ell) p(\boldsymbol{\Theta}) \quad (7.2)$$

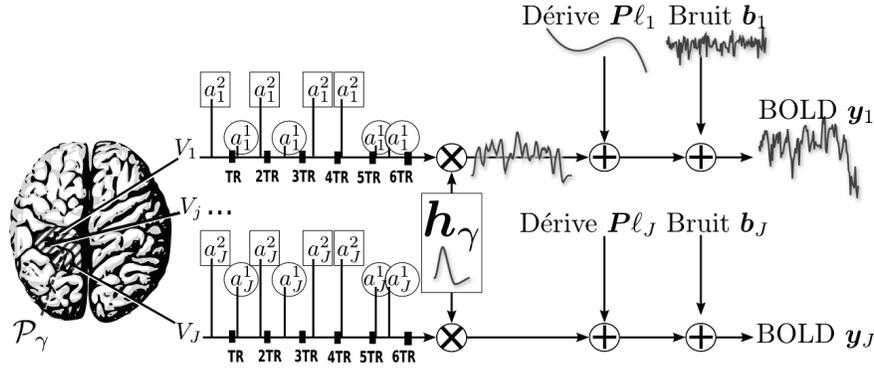


Figure 7.4 – Modèle parcellique du signal BOLD. La taille de chaque parcelle  $\mathcal{P}_\gamma$  est typiquement de quelques centaines de voxels. Le nombre  $M$  de conditions expérimentales d'un paradigme varie habituellement entre 1 et 5 ; dans cette illustration,  $M = 2$ . Ce modèle supporte des paradigmes asynchrones pour lesquels les temps d'arrivée des stimuli ne correspondent pas nécessairement aux instants d'acquisition. Les NRN ( $a_j^1, a_j^2$ ) sont voxel-spécifiques tandis que la FRH  $h_\gamma$  est constante pour la parcelle  $\mathcal{P}_\gamma$  mais varie d'une parcelle à l'autre (non montré). Elle peut être échantillonnée à une période de 0.5s pour une durée allant typiquement de 20s à 25s (e.g.,  $D = 51$ ). Les coefficients  $l_j$  portent usuellement sur quelques composantes ( $Q = 4$ ).

où  $\Theta$  rassemble tous les hyperparamètres du modèle :  $\theta_0$  contient ceux liés au modèle de bruit et  $\theta_x$  se rapporte à ceux liés à l'inconnue  $x \in \{h_\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{L}\}$ . Cette densité jointe nécessite l'expression du terme de vraisemblance ainsi que la définition d'*a priori* sur les variables modélisées.

### 7.3.1. Vraisemblance

La vraisemblance est la densité des observations pour un jeu de paramètres donné du modèle considéré. Elle modélise l'incertitude d'adéquation du modèle aux données observées et dépend donc directement des hypothèses sur le bruit. Même si la structure du bruit est corrélée spatialement [WOO 04b], cette dépendance est négligée et les séries temporelles d'IRMf sont considérées indépendantes spatialement mais *non* identiquement distribuées. Par ailleurs, étant donnée la nature de l'acquisition des données (cf.  $\mathcal{H}_2$ ), le bruit est supposé auto-corrélé temporellement et l'on considère alors un processus AR(1) à l'instar de [WOO 01] :  $b_j \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Gamma_j)$  avec  $\Gamma_j = \sigma_j^2 \Lambda_j^{-1}$  et où  $\Lambda_j$  est tridiagonale symétrique et dépend du paramètre AR  $\rho_j$  [MAK 08] :  $(\Lambda_j)_{1,1} = (\Lambda_j)_{N,N} = 1$ ,  $(\Lambda_j)_{p,p} = 1 + \rho_j^2$  pour  $p = 2 : N - 1$  et  $(\Lambda_j)_{p+1,p} = (\Lambda_j)_{p,p+1} = -\rho_j$  pour  $p = 1 : N - 1$ . Ces paramètres sont supposés variables d'un voxel  $V_j$  à l'autre étant donnée leur dépendance avec les tissus

[WOO 04a, PEN 07]. La vraisemblance s'écrit alors :

$$p(\mathbf{Y} | \mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{L}, \boldsymbol{\theta}_0) \propto \prod_{j=1}^{J_\gamma} |\boldsymbol{\Gamma}_j|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \bar{\mathbf{y}}_j^t \boldsymbol{\Gamma}_j^{-1} \bar{\mathbf{y}}_j\right), \quad (7.3)$$

où  $\boldsymbol{\theta}_0 = (\theta_{0,j})_{j=1:J_\gamma}$ ,  $\theta_{0,j} = (\rho_j, \sigma_j^2)$  et  $\bar{\mathbf{y}}_j = \mathbf{y}_j - \mathbf{P}\boldsymbol{\ell}_j - \mathbf{S}_j \mathbf{h}_\gamma$ .

### 7.3.2. Loix a priori

Dans la démarche bayésienne, des lois *a priori* sont introduites sur les inconnues  $(\mathbf{A}, \mathbf{h}_\gamma, \mathbf{L})$  et sur les hyperparamètres  $\Theta$ .

#### Fonction de réponse hémodynamique (FRH)

A l'instar de [MAR 03, CIU 03], on attend une FRH à variations douces, sa densité *a priori* est une distribution gaussienne multivariée dont la matrice de variance-covariance exprime une contrainte sur la dérivée seconde :  $\mathbf{h}_\gamma \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, v_h \mathbf{R})$  avec  $\mathbf{R} = (\mathbf{D}_2^t \mathbf{D}_2)^{-1}$ . Le but est de pénaliser les fortes variations de pente. Des contraintes de bord sont en outre introduites sous la forme  $h_0 = h_{D\Delta t} = 0$ . L'*a priori* retenu pour la variance  $v_h$  correspond à l'*a priori* de Jeffreys :  $p(v_h) = v_h^{-1/2}$ . Sur la seule base de cette *a priori*, dans une parcelle inactive, on peut imaginer que la réponse hémodynamique estimée sera de très faible amplitude, et donc sa pente le sera aussi. Elle sera ainsi très vraisemblable. Plusieurs solutions sont envisageables pour éviter dans le cas de signaux inactifs qu'une FRH solution soit aberrante faisant ainsi croire qu'il s'agit d'un signal actif. L'une d'entre elles consiste à remplacer le vecteur moyenne de la gaussienne en l'imposant à une forme proche d'une hémodynamique canonique. Une autre consiste à détecter les parcelles actives après inférence, c'est-à-dire pour lesquelles au moins une condition expérimentale est *pertinente* c'est-à-dire qu'elle délivre une réponse évoquée significative ou des NRN positifs [BAK 12].

#### Niveaux de réponse neurale (NRN)

En accord avec le principe du maximum d'entropie [ROB 07, p. 109], l'indépendance des NRN est postulée entre conditions :  $p(\mathbf{A} | \boldsymbol{\theta}_\alpha) = \prod_m p(\mathbf{a}^m | \boldsymbol{\theta}_m)$  avec  $\boldsymbol{\theta}_\alpha = (\boldsymbol{\theta}_m)_{m=1:M}$  regroupant l'ensemble des hyperparamètres pour la  $m$ -ième condition. Des modèles de mélange sont introduits pour segmenter les voxels activés des voxels non activés. Soient  $q_j^m$  les variables d'allocation qui codent l'état activé ( $q_j^m = 1$ ) ou non activé ( $q_j^m = 0$ ) pour la condition  $m$  au sein du voxel  $V_j$ . Les NRN restent indépendants conditionnellement à  $\mathbf{q}^m$  :  $p(\mathbf{a}^m | \mathbf{q}^m, \boldsymbol{\theta}_m) = \prod_j p(a_j^m | q_j^m, \boldsymbol{\theta}_m)$ .

Les modèles de mélange *spatiaux* (MMS) introduits dans [VIN 10a] permettent de prendre en compte une certaine corrélation spatiale entre voxels voisins de façon à favoriser la détection de clusters d'activation plutôt que des voxels isolés. Dans les MMS, les poids du mélange sont implicites et gouvernés uniquement par la relation

locale d'interaction entre variables latentes. La distribution marginale des NRN, non factorisable sur les voxels, s'écrit comme suit :

$$p(\mathbf{a}^m | \boldsymbol{\theta}_m) = \sum_{\mathbf{q}^m \in \{0,1\}^{J_\gamma}} \Pr(\mathbf{q}^m | \boldsymbol{\theta}_m) \prod_{j=1}^{J_\gamma} p(a_j^m | q_j^m, \boldsymbol{\theta}_m). \quad (7.4)$$

Fort heureusement, comme nous le verrons en section 7.4, son expression explicite n'est pas nécessaire puisque seules les lois conditionnelles sont utiles dans le schéma d'échantillonnage.

La corrélation spatiale est prise en compte directement dans la probabilité d'activation à travers un champ de Ising caché<sup>4</sup> sur les variables  $\mathbf{q}^m$ , à l'instar des travaux antérieurs [HIG 98, SMI 03]. Ici, le champ *a priori* sur  $\mathbf{q}^m$  s'exprime sous la forme :

$$\Pr(\mathbf{q}^m | \beta_m) = Z(\beta_m)^{-1} \exp(\beta_m U(\mathbf{q}^m)) \quad \text{où} \quad U(\mathbf{q}^m) = \sum_{j \sim k} I(q_j^m = q_k^m) \quad (7.5)$$

et  $I(A) = 1$  si  $A$  est vraie et  $I(A) = 0$  sinon. La notation  $j \sim k$  signifie que la somme s'étend sur toutes les paires  $(V_j, V_k)$  de voxels voisins. Le système de voisinage peut être 3D dans le volume cérébral intersectant la parcelle  $\mathcal{P}_\gamma$  ou 2D le long de la surface corticale. Dans ce chapitre, nous discutons seulement du cas 3D muni de la 6-connexité. Les extensions à 18 et 26 voisins sont directes. Dans (7.5), nous ne considérons pas de champ externe pour ne pas privilégier un état *a priori*. Néanmoins, des travaux antérieurs ont montré qu'une information anatomique pouvait être modélisée à travers un champ externe de façon à accroître la probabilité d'activation (classe 1) dans la matière grise [SMI 03]. Le paramètre  $\beta_m > 0$  contrôle le niveau de régularisation spatiale : une valeur importante de  $\beta_m$  associe des probabilités élevées aux configurations homogènes, c'est-à-dire contenant des voxels de la même classe. Notons que les motifs d'activation au sein d'une parcelle  $\mathcal{P}_\gamma$  sont susceptibles de varier d'une condition  $m$  à l'autre. C'est pourquoi différents paramètres  $\beta_m$  sont considérés. La *fonction de partition* (FP)  $Z(\cdot)$  du champ de Markov s'écrit :

$$Z(\beta_m) = \sum_{\mathbf{q}^m \in \{0,1\}^{J_\gamma}} \exp(\beta_m U(\mathbf{q}^m)) \quad (7.6)$$

et assure la normalisation de la probabilité  $\Pr(\mathbf{q}^m | \beta_m)$ . Dans la suite, nous supposons que  $(a_j^m | q_j^m = i) \sim \mathcal{N}(\mu_{i,m}, v_{i,m})$ , pour  $i = 0,1$ . Nous imposons  $\mu_{0,m} = 0$  pour la moyenne des NRN dans les voxels inactivés conduisant au vecteur d'hyperparamètres  $\boldsymbol{\theta}_m = [v_{0,m}, \mu_{1,m}, v_{1,m}, \beta_m]$  pour chaque condition  $m$ .

4. Notons que si l'on souhaite gérer également les désactivations, les champs de Potts à trois classes se substituent aux champs de Ising, voir [RIS 11] pour les détails.

Remarquons qu'une formulation proche de type Bernoulli-gaussienne a aussi été proposée en IRMf dans [SMI 03]. Cette situation correspond au cas du mélange dégénéré c'est-à-dire  $v_{0,m} = 0$ . Toutefois, cette formulation est trop fruste car différentes configurations d'activation peuvent apparaître dans la parcelle courante et les paramètres  $\theta_m$  du mélange pour la condition  $m$  sont censés s'adapter à l'ensemble de celles-ci :

- Dans le cas où tous les voxels s'activent sous l'effet de la condition  $m$ , le modèle proposé est trop riche et donc l'estimation de  $v_{0,m}$  tend vers 0. On retrouve le modèle BG sans l'avoir imposé.

- Dans le cas où tous les voxels sont inactivés, l'estimation de  $\mu_{1,m}$  est proche de 0 et les deux classes du mélange se superposent. Là encore, le modèle est trop riche, et l'approche développée dans [BAK 12] pour la sélection automatique des conditions pertinentes apporte une solution efficace à ce problème. Considérer un modèle BG n'apporterait rien dans ce cas, car lui aussi serait redondant.

- Dans le cas intermédiaire où seulement une partie des voxels s'active en réponse à la condition  $m$ , le modèle de mélange proposé permet de s'adapter à des configurations d'activité hétérogènes et amène à considérer comme inactifs des voxels faiblement activés au regard des autres présents dans la parcelle. C'est dans ce genre de configurations que le modèle BG est pris en défaut car il peut conduire à des faux positifs. L'introduction d'une variance  $v_{0,m} \neq 0$  permet ainsi de ne pas ramener l'estimation  $\mu_{1,m}$  vers 0 en excluant des voxels activés (ceux dont l'activité évoquée est trop faible).

- En présence de légères déactivations<sup>5</sup>, c'est-à-dire de NRN négatifs, le modèle BG est également pris en défaut et là encore, la formulation proposée, plus souple, s'adapte à cette configuration pourvu que le nombre de déactivations et leur amplitude soient faibles devant ceux des activations, ceci afin de maintenir  $\mu_{1,m} > 0$ .

- Des modèles de mélanges plus riches à trois classes et considérant des distributions à support sur  $\mathbb{R}_+$  ou  $\mathbb{R}_-$  pour les NRN des voxels activés et désactivés ont été testés avec succès dans [MAK 08] mais la complexité numérique engendrée ne permet pas de considérer aisément l'introduction de modèles spatiaux avec une estimation autodidacte des paramètres.

Il est intéressant de remarquer que la régularisation spatiale introduite sur  $\mathbf{A}$  est non-quadratique grâce à l'introduction d'un modèle composite sur  $(\mathbf{A}, \mathbf{Q})$ , elle permet donc de réhausser les frontières des activations sur les murs de sillons au sein du cortex d'une façon plus simple que l'usage d'une régularisation convexe non-quadratique directement appliquée sur  $\mathbf{A}$ . La raison tient au fait que l'estimation automatique du niveau de régularisation  $\beta_m$  ne fait intervenir que le champ de Ising ou de Potts *a priori*

---

5. phénomène bien connu mis en évidence dans le réseau fonctionnel du mode par défaut [GRE 03, FOX 07, CIU 12], où le niveau d'activité décroît sous l'action d'une stimulation.

dont le calcul de la fonction de partition peut être tabulé à l'avance car les variables  $\mathbf{Q}$  sont cachées : elles n'interviennent donc pas dans le modèle d'observation (7.1). De plus, la régularisation reste séparable à travers les conditions expérimentales, alors qu'une régularisation directe sur chaque vecteur  $\mathbf{a}^m$  induirait une non-séparabilité en raison de la forme du modèle d'observation.

### Hyperparamètres des mélanges

Nous considérons des lois *a priori* conjuguées pour les variances  $v_{0,m}$  et  $v_{1,m}$ , c'est-à-dire des distributions inverse-gamma,  $\mathcal{IG}(a_{v_0}, b_{v_0})$  et  $\mathcal{IG}(a_{v_1}, b_{v_1})$ , identiques pour toutes les conditions  $m$ . Le réglage des méta-hyperparamètres  $(a_{v_{0,1}}, b_{v_{0,1}})$  doit être réalisé en prenant soin d'être le moins informatif possible. Outre le fait que la loi *a posteriori* conditionnelle reste inverse-gamma par conjugaison, l'intérêt de ce choix réside dans le fait qu'elle reste propre. Ainsi, l'échantillonnage des distributions *a posteriori* conditionnelles des variances  $v_{\cdot,m}$  reste possible même quand une des classes du mélange est vide ou constituée d'un seul élément, au contraire de la situation générée par l'usage d'*a priori* non-informatif de Jeffreys c'est-à-dire d'une loi  $p(v_{0,m}) = v_{0,m}^{-1/2}$ . Pour les mêmes raisons, un *a priori* propre  $\mathcal{N}(a_{\mu_1}, b_{\mu_1})$  est retenu pour  $\mu_{1,m}$ . Les choix des constantes  $(a_{\mu_1}, b_{\mu_1})$  sont effectués pour exprimer des densités diffuses, *i.e.*, peu informatives.

### Bruit et dérives

Les paramètres de bruit et de dérive,  $\boldsymbol{\theta}_0$  et  $\mathbf{L}$  respectivement, sont supposés indépendants spatialement :  $p(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{L} | v_\ell) = \prod_j p(\theta_{0,j}) p(\ell_j | v_\ell)$  et sans information *a priori*, on choisit :  $\ell_j \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, v_\ell \mathbf{I}_Q)$ <sup>6</sup> et  $p(\rho_j, \sigma_j^2) = \sigma_j^{-1} I(|\rho_j| < 1)$  afin d'assurer la stabilité du processus AR(1) pour le bruit [KAY 88]. Comme pour  $v_{\mathbf{h}}$ , nous choisissons un *a priori* non informatif de Jeffreys pour  $v_\ell$  :  $p(v_\ell) = v_\ell^{-1/2}$ .

### 7.3.3. Distribution *a posteriori*

A partir des Eqs. (7.2)–(7.3), et des lois *a priori* définies, nous obtenons la loi *a posteriori* :

$$p(\mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{L}, \mathbf{Q}, \boldsymbol{\Theta} | \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} | \mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{L}, \boldsymbol{\theta}_0) p(\mathbf{A}, \mathbf{Q} | \boldsymbol{\theta}_\mathbf{A}) p(\mathbf{h}_\gamma | v_{\mathbf{h}}) \\ p(\mathbf{L} | v_\ell) p(\boldsymbol{\theta}_0) p(\boldsymbol{\theta}_\mathbf{A}) p(v_{\mathbf{h}}) p(v_\ell)$$

6. où  $\mathbf{I}_Q$  est la matrice identité de taille  $Q$ .

qui se développe sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{L}, \mathbf{Q}, \Theta | \mathbf{Y}) &\propto v_{\mathbf{h}}^{-D/2} v_{\ell}^{-J_\gamma Q/2} \prod_{j=1}^{J_\gamma} (1 - \rho_j^2)^{1/2} \sigma_j^{-N-1} I(|\rho_j| < 1) \\
 &\exp \left( -\frac{\mathbf{h}_\gamma^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}_\gamma}{2v_{\mathbf{h}}} - \sum_{j=1}^{J_\gamma} \left( \frac{\bar{\mathbf{y}}_j^t \Lambda_j \bar{\mathbf{y}}_j}{2\sigma_j^2} + \frac{\|\ell_j\|^2}{2v_{\ell}} \right) \right) \quad (7.7) \\
 &\prod_{m=1}^M p(\mathbf{a}^m | \mathbf{q}^m, \theta_m) p(\mathbf{q}^m, \theta_m).
 \end{aligned}$$

Il apparaît sur (7.7) que cette distribution *a posteriori* est bien spécifique de  $\mathcal{P}_\gamma$  à travers la FRH  $\mathbf{h}_\gamma$ . Cette densité est par ailleurs trop complexe pour autoriser le calcul analytique d'un estimateur. Par conséquent, nous exploitons dans la section 7.4 les outils de la simulation stochastique, encore appelés méthodes de Monte-Carlo par chaîne de Markov (MCMC) pour simuler des échantillons de (7.7). Une alternative variationnelle est ensuite présentée en section 7.5.

#### 7.4. Schéma d'inférence stochastique par MCMC

Le schéma d'inférence s'articule autour d'un échantillonneur hybride de Gibbs-Metropolis dans lequel les lois *a posteriori* conditionnelles sont échantillonnées tour à tour, soit directement (Gibbs) soit à l'aide d'une loi instrumentale (Metropolis-Hastings). L'algorithmique est détaillé dans [VIN 10a, Table I]. Après convergence de la chaîne de Markov, les quantités d'intérêt sont ensuite estimées au sens de la moyenne *a posteriori* (PM pour *Posterior Mean*) comme suit :  $\forall x \in \{\mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}, \Theta\}$  :  $\hat{x}^{\text{MP}} = (T_c - T_0)^{-1} \sum_{t=T_0+1}^{T_c} x^{(t)}$ , où  $T_0$  définit la période de chauffe et  $T_c$  le nombre d'itérations à convergence. Pour la détection, nous recourons à l'estimateur du maximum *a posteriori* marginal :  $(\hat{q}_j^m)^{\text{MMAP}} = \arg \max_i \Pr(q_j^m = i | \mathbf{y}_j)$ .

Succinctement, nous présentons deux étapes, *i.e.*, celles qui concerne la simulation de  $\mathbf{h}_\gamma$  et  $\mathbf{A}$ , en vue de mettre en évidence les liens entre les schémas variationnel et stochastique.

#### 7.4.1. Simulation de la FRH et des NRN

La loi *a posteriori*  $p(\mathbf{h}_\gamma | \mathbf{Y}, \mathbf{A}, \mathbf{L}, \Theta)$  est gaussienne et s'écrit  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{h}_\gamma}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{h}_\gamma})$ <sup>7</sup> :

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{h}_\gamma}^{-1} = v_{\mathbf{h}}^{-1} \mathbf{R}^{-1} + \sum_{j=1}^{J_\gamma} \mathbf{S}_j^t \boldsymbol{\Gamma}_j^{-1} \mathbf{S}_j, \quad \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{h}_\gamma} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{h}_\gamma} \sum_{j=1}^{J_\gamma} \mathbf{S}_j^t \boldsymbol{\Gamma}_j^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{P}\boldsymbol{\ell}_j). \quad (7.8)$$

De même, par un argument de conjugaison, la loi *a priori* (7.4) sur les NRN  $\mathbf{A}$  étant un mélange gaussien et la vraisemblance de  $\mathbf{A}$  étant gaussienne lorsque  $\mathbf{h}_\gamma$  est fixé, la densité *a posteriori* marginale  $p(\mathbf{A} | \mathbf{Y}, \mathbf{h}_\gamma, \mathbf{L}, \Theta)$  est aussi un mélange gaussien. Compte tenu de l'introduction de  $\mathbf{Q}$  dans le schéma d'échantillonnage<sup>8</sup> et du modèle de corrélation spatiale retenu en (7.5), la simulation de  $\mathbf{A}$  se simplifie et se factorise :  $p(\mathbf{A} | \mathbf{Y}, \mathbf{Q}, \mathbf{h}_\gamma, \Theta) = \prod_j p(\mathbf{a}_j | \mathbf{y}_j, \mathbf{q}_j, \mathbf{h}_\gamma, \Theta)$ . Au sein du voxel  $V_j$ , il ne reste qu'à considérer successivement les différentes conditions expérimentales  $m \in \mathbb{N}_M^*$  et simuler selon  $p(a_j^m | q_j^m = i, \mathbf{y}_j, \dots) = \mathcal{N}(\mu_{i,j}^m, v_{i,j}^m)$ . L'identification des paramètres  $(\mu_{i,j}^m, v_{i,j}^m)$  des lois gaussiennes conduit à :

$$v_{i,j}^m = (v_{i,m}^{-1} + \mathbf{g}_m^t \boldsymbol{\Gamma}_j^{-1} \mathbf{g}_m)^{-1}, \quad \mu_{i,j}^m = v_{i,j}^m (\mathbf{g}_m^t \boldsymbol{\Gamma}_j^{-1} \mathbf{e}_{m,j} + i \mu_{i,m} v_{i,m}^{-1}) \quad (7.9)$$

où  $\mathbf{g}_m = \mathbf{X}_m \mathbf{h}_\gamma$  et  $\mathbf{e}_{m,j} = \mathbf{y}_j - \mathbf{P}\boldsymbol{\ell}_j - \sum_{m' \neq m} \alpha_j^{m'} \mathbf{g}_{m'} = \bar{\mathbf{y}}_j + \mathbf{g}_m$ . L'identification des poids  $\lambda_{i,j}^m$  du mélange *a posteriori* est détaillée en [VIN 10a, Annexe B].

#### 7.4.2. Régularisation spatiale non supervisée et spatialement adaptative

Au sein d'une parcelle  $\mathcal{P}_\gamma$ , la régularisation spatiale non supervisée consiste à régler automatiquement le vecteur  $\boldsymbol{\beta}$  à partir des données  $\mathbf{Y}$ . Dans l'échantillonneur de Gibbs proposé, cette étape est réalisée en probabilisant  $\boldsymbol{\beta}$  et en ajoutant une étape d'échantillonnage de  $p(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{Q})$ , qui dépend de  $p(\mathbf{q}^m | \beta_m)$  et de l'*a priori*  $p(\boldsymbol{\beta})$  :

$$p(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{Q}) = \prod_{m=1}^M p(\beta_m | \mathbf{q}^m) \propto \prod_{m=1}^M Z(\beta_m)^{-1} \exp(\beta_m U(\mathbf{q}^m)) p(\beta_m) \quad (7.10)$$

où  $p(\beta_m)$  est choisie tronquée sur un intervalle  $[0, \beta_{\max}]$  de façon à éviter les phénomènes de transition de phase. La loi (7.10) dépend de  $Z(\cdot)$ , indépendant de  $m$ . Par conséquent, l'estimation de  $Z(\cdot)$  demeure un prérequis à toute tentative d'échantillonnage de  $p(\beta_m | \mathbf{q}^m)$ . Dans [VIN 10a], un algorithme de Metropolis-Hastings a été mis en œuvre pour réaliser cette étape. La probabilité d'acceptation d'une valeur candidate

7. Les auteurs signalent une erreur dans l'expression de  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{h}}^{-1}$  dans [MAK 08, Eq. (B.1)].

8. Voir détails en [VIN 10a, Annexe B].

$\beta_m^{(c)}$  s'écrit :  $\alpha(\beta_m^{(t)} \rightarrow \beta_m^{(c)}) = \min(1, A_{t \rightarrow c}^m)$  où le rapport d'acceptation  $A_{t \rightarrow c}^m$  est donné par :

$$A_{t \rightarrow c}^m = \frac{p(\beta_m^{(c)} | \mathbf{q}_m^{(t)}) g(\beta_m^{(t)} | \beta_m^{(c)})}{p(\beta_m^{(t)} | \mathbf{q}_m^{(t)}) g(\beta_m^{(c)} | \beta_m^{(t)})} = \frac{Z(\beta_m^{(t)})}{Z(\beta_m^{(c)})} \exp\left(\left(\beta_m^{(c)} - \beta_m^{(t)}\right) U\left(\left(\mathbf{q}_m^{(t)}\right)\right)\right) B_{t \rightarrow c}^m,$$

avec  $B_{t \rightarrow c}^m$  fonction la loi instrumentale  $g$ . L'évaluation exacte de  $Z(\beta)$  en un temps raisonnable est impossible pour des tailles d'images classiques. Son estimation précise est accessible en adoptant un schéma d'échantillonnage d'importance sur une grille discrète de valeurs de  $\beta$ . Néanmoins, le coût calculatoire reste important lors d'une analyse cerveau entier impliquant de multiples parcelles pour chacune desquelles la FP du champ caché doit être estimée. En effet, ces parcelles ont toutes des géométries et des tailles différentes comme l'illustre la figure 7.5.

Pour pallier cette difficulté, un schéma d'extrapolation de FPs est mis en place, s'appuyant sur quelques fonctions de référence pour s'adapter aux variations de géométrie. Les détails algorithmiques sont disponibles dans [VIN 10a, RIS 11].

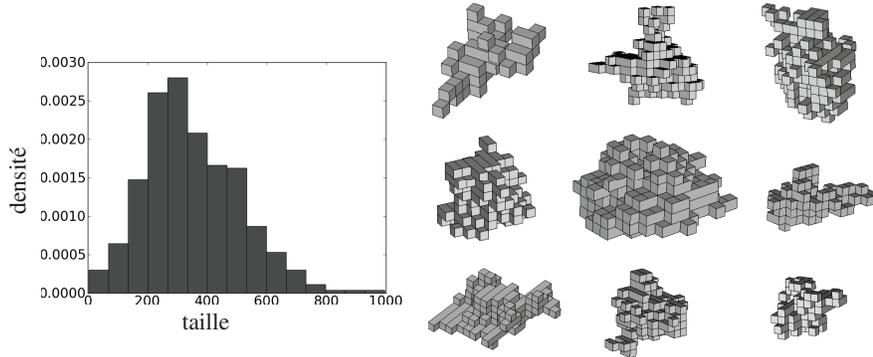


Figure 7.5 – Variabilité des parcelles issues de données réelles, formant la parcellisation d'entrée de l'approche DEC. A gauche : histogramme des tailles de parcelles ; à droite : illustration de quelques parcelles avec des géométries variées.

## 7.5. Schéma alternatif d'inférence variationnelle

### 7.5.1. Motivations et fondements

L'analyse bayésienne exacte du modèle DEC est difficile et a conduit au calcul approché de la distribution *a posteriori* (7.7) à l'aide d'une procédure MCMC, dont la convergence asymptotique est assurée sous des conditions simples à vérifier

[GEM 84, HAS 70]. Toutefois, des difficultés de mise en œuvre peuvent apparaître du fait de temps de calcul longs, de la nécessité de mettre en place un diagnostic de convergence parfois sophistiqué des algorithmes de simulations [BRO 98], et du surcoût de travail nécessaire pour aborder des questions de sélection de modèle à partir des échantillons de la loi *a posteriori* [MAR 07]. Ces considérations nous ont incités à développer des approximations déterministes, en fait variationnelles, de la distribution (7.7). Contrairement aux schémas MCMC, les techniques de calcul variationnelles ne sont en général pas exactes même asymptotiquement mais leur souplesse calculatoire justifie bien souvent leur utilisation.

L'idée maîtresse ici consiste à approcher la distribution cible *i.e.*, la loi *a posteriori* avec une distribution pour laquelle on peut mener les calculs inhérents à un algorithme de maximisation de la vraisemblance, tel que l'algorithme EM (*Expectation Maximization*) [DEM 77]. L'identification de la meilleure distribution approchant la loi cible est réalisée au sens de la divergence de Kullback-Leibler en imposant des contraintes supplémentaires lorsque la distribution cible n'est pas calculable directement. La procédure la plus courante consiste ainsi à supposer une forme *produit* pour la distribution approchante comme nous allons l'illustrer maintenant dans le modèle DEC.

Outre l'approximation basée sur un principe variationnel, la différence avec l'approche précédente réside dans l'absence d'*a priori* sur les paramètres. Nous nous plaçons ici dans un cadre non bayésien avec *variables manquantes*. Les variables d'intérêt considérées comme manquantes sont  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{h}_\gamma$ ,  $\mathbf{Q}$  alors que  $\mathbf{L}$  et  $\Theta$  ont le statut de paramètres estimés par maximum de vraisemblance dans un schéma itératif de type *Expectation-Maximization* (EM) [DEM 77]. Notons que du point de vue du traitement probabiliste, il n'y a pas de différence entre une variable manquante et un paramètre avec une loi *a priori* de sorte qu'il est facile d'incorporer celle-ci sur certains paramètres si nécessaire. Nous illustrerons dans la suite cette flexibilité en ajoutant un *a priori* sur les paramètres de régularisation spatiale  $\beta_m$ .

### 7.5.2. Algorithme EM variationnel

Nous cherchons une approximation produit sous la forme  $\tilde{p} = \tilde{p}_A \tilde{p}_{H_\gamma} \tilde{p}_Q$  de la distribution *a posteriori* cible  $f_{H_\gamma A Q} = p(\mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{Q} | \mathbf{Y}; \Theta)$ <sup>9</sup> en minimisant la divergence de Kullback-Leibler  $\mathcal{D}(\tilde{p} || f_{H_\gamma A Q})$  :

$$\mathcal{D}(\tilde{p} || f_{H_\gamma A Q}) = \int \tilde{p}(\mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{Q}) \ln \frac{\tilde{p}(\mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{Q})}{f_{H_\gamma A Q}(\mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{Q})} d\mathbf{h}_\gamma d\mathbf{A} d\mathbf{Q} \quad (7.11)$$

9. L'utilisation du point-virgule permet de distinguer les paramètres déterministes inconnus au sein d'un modèle probabiliste des paramètres ou variables aléatoires.

ou de façon équivalente en maximisant l'énergie libre  $\mathcal{F}(\tilde{p}; \Theta) = \ln p(\mathbf{Y}; \Theta) - \mathcal{D}(\tilde{p} || f_{H_\gamma, A, Q})$  [NEA 98]. Les termes de la loi produit optimale vérifient alors :

$$(\tilde{p}_A, \tilde{p}_{H_\gamma}, \tilde{p}_Q) = \arg \max_{p_H, p_A, p_Q} \mathcal{F}(p_A p_H p_Q; \Theta),$$

ce qui du fait de la forme produit se simplifie encore mais conduit à des formules qui restent couplées et pour lesquelles des solutions explicites directes pour  $\tilde{p}_A$ ,  $\tilde{p}_{H_\gamma}$  et  $\tilde{p}_Q$  ne sont pas disponibles. Toutefois, la formulation ci-dessus a l'avantage de conduire à une solution itérative dans laquelle on met à jour successivement l'un des termes  $\tilde{p}_A$ ,  $\tilde{p}_{H_\gamma}$  et  $\tilde{p}_Q$  comme suit, les deux autres étant fixés :

$$\text{étape E-H : } \tilde{p}_{H_\gamma}^{(r)} = \arg \max_{p_{H_\gamma}} \mathcal{F}(\tilde{p}_A^{(r-1)} p_{H_\gamma} \tilde{p}_Q^{(r-1)}; \Theta^{(r-1)}) \quad (7.12)$$

$$\text{étape E-A : } \tilde{p}_A^{(r)} = \arg \max_{p_A} \mathcal{F}(p_A \tilde{p}_{H_\gamma}^{(r)} \tilde{p}_Q^{(r-1)}; \Theta^{(r-1)}) \quad (7.13)$$

$$\text{étape E-Q : } \tilde{p}_Q^{(r)} = \arg \max_{p_Q} \mathcal{F}(\tilde{p}_A^{(r)} \tilde{p}_{H_\gamma}^{(r)} p_Q; \Theta^{(r-1)}) . \quad (7.14)$$

en notant  $\tilde{p}_A^{(r-1)}$ ,  $\tilde{p}_Q^{(r-1)}$  et  $\Theta^{(r-1)}$ , des solutions courantes et des paramètres à l'itération  $r-1$ . Les expressions (7.12)-(7.14) peuvent alors s'écrire en termes de divergence de Kullback-Leibler dont les propriétés permettent d'identifier les distributions solutions comme suit :

$$\tilde{p}_{H_\gamma}^{(r)}(\mathbf{h}_\gamma) \propto \exp \left( \mathbb{E}_{\tilde{p}_A^{(r-1)} \tilde{p}_Q^{(r-1)}} [\ln p(\mathbf{h}_\gamma | \mathbf{Y}, \mathbf{A}, \mathbf{Q}; \Theta^{(r-1)})] \right) \quad (7.15)$$

$$\tilde{p}_A^{(r)}(\mathbf{A}) \propto \exp \left( \mathbb{E}_{\tilde{p}_{H_\gamma}^{(r)} \tilde{p}_Q^{(r-1)}} [\ln p(\mathbf{A} | \mathbf{Y}, \mathbf{h}_\gamma, \mathbf{Q}; \Theta^{(r-1)})] \right) \quad (7.16)$$

$$\tilde{p}_Q^{(r)}(\mathbf{Q}) \propto \exp \left( \mathbb{E}_{\tilde{p}_A^{(r)} \tilde{p}_{H_\gamma}^{(r)}} [\ln p(\mathbf{Q} | \mathbf{Y}, \mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}; \Theta^{(r-1)})] \right) . \quad (7.17)$$

Pour ce qui est de l'estimation des paramètres  $\Theta$ , on effectue les mises à jour selon :

$$\Theta^{(r)} = \arg \max_{\Theta} \mathbb{E}_{\tilde{p}_A^{(r)} \tilde{p}_{H_\gamma}^{(r)} \tilde{p}_Q^{(r)}} [\ln p(\mathbf{Y}, \mathbf{h}_\gamma, \mathbf{A}, \mathbf{Q}; \Theta)] . \quad (7.18)$$

Les expressions des lois  $\tilde{p}_{H_\gamma}^{(r)}$ ,  $\tilde{p}_A^{(r)}$  et  $\tilde{p}_Q^{(r)}$  s'avèrent explicites, de même que celles d'une partie des paramètres  $\Theta$ . En particulier, les distributions  $\tilde{p}_{H_\gamma}^{(r)}$  et  $\tilde{p}_A^{(r)}$  sont gaussiennes. Dans la suite, pour alléger les notations, nous éliminons l'exposant  $r$  et nous notons  $\tilde{p}_{H_\gamma} = \mathcal{N}(\mathbf{m}_{H_\gamma}, \mathbf{V}_{H_\gamma})$  et  $\tilde{p}_A = \prod_j \tilde{p}_{A_j}$  avec  $\tilde{p}_{A_j} = \mathcal{N}(\mathbf{m}_{A_j}, \mathbf{V}_{A_j})$ . Les expressions de  $\mathbf{m}_{H_\gamma}$  et  $\mathbf{V}_{H_\gamma}$  sont proches de celles obtenues avec la procédure MCMC en équation (7.8). Les termes qui dans (7.8) dépendent des  $a_j^m$  sont remplacés par leur

espérance sous la loi  $\tilde{p}_A$ . A partir de (7.15), il vient :

$$\mathbf{m}_{H_\gamma} = \mathbf{V}_{H_\gamma} \sum_{j=1}^{J_\gamma} \tilde{\mathbf{S}}_j^t \Gamma_j^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{P}\ell_j) \quad (7.19)$$

$$\mathbf{V}_{H_\gamma}^{-1} = v_h^{-1} \mathbf{R}^{-1} + \sum_{j=1}^{J_\gamma} \left( \sum_{m,m'} v_{A_j^m A_j^{m'}} \mathbf{X}_m^t \Gamma_j^{-1} \mathbf{X}_{m'} + \tilde{\mathbf{S}}_j^t \Gamma_j^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_j \right) \quad (7.20)$$

où  $\tilde{\mathbf{S}}_j = \sum_{m=1}^M m_{A_j^m} \mathbf{X}_m$ . Les notations  $m_{A_j^m}$  et  $v_{A_j^m A_j^{m'}}$  représentent respectivement les composants  $m$  et  $(m, m')$  du vecteur des moyennes et de la matrice de covariance de la distribution courante  $\tilde{p}_{A_j}$ . Pour la distribution  $\tilde{p}_{A_j}$  définie sur  $\mathbb{R}^M$ , il vient :

$$\mathbf{m}_{A_j} = \mathbf{V}_{A_j} \left( \sum_{i=0,1} \Delta_{ij} \boldsymbol{\mu}_i + \tilde{\mathbf{G}}^t \Gamma_j^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{P}\ell_j) \right) \quad (7.21)$$

$$\mathbf{V}_{A_j} = \left( \sum_{i=0,1} \Delta_{ij} + \tilde{\mathbf{H}}_j \right)^{-1} \quad (7.22)$$

où  $\boldsymbol{\mu}_i = [\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,M}]^t$ ,  $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbb{E}_{\tilde{p}_{H_\gamma}} [\mathbf{G}]$  avec  $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_M]$  (la colonne  $m$  de  $\tilde{\mathbf{G}}$  est notée  $\tilde{\mathbf{g}}_m = \mathbf{X}_m \mathbf{m}_{H_\gamma}$ ),  $\Delta_{ij} = \text{diag}[\tilde{p}_{Q_j^m}(i)/\tilde{v}_{i,m}]$  et  $\tilde{\mathbf{H}}_j = \mathbb{E}_{\tilde{p}_{H_\gamma}} [\mathbf{G}^t \Gamma_j^{-1} \mathbf{G}]$ , une matrice  $M \times M$  dont l'élément  $(m, m')$  est :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{p}_{H_\gamma}} [\mathbf{g}_m^t \Gamma_j^{-1} \mathbf{g}_{m'}] &= \mathbb{E}_{\tilde{p}_{H_\gamma}} [\mathbf{g}_m]^t \Gamma_j^{-1} \mathbb{E}_{\tilde{p}_{H_\gamma}} [\mathbf{g}_{m'}] + \text{tr}(\Gamma_j^{-1} \text{cov}_{\tilde{p}_{H_\gamma}}(\mathbf{g}_m, \mathbf{g}_{m'})) \\ &= \tilde{\mathbf{g}}_m^t \Gamma_j^{-1} \tilde{\mathbf{g}}_{m'} + \text{tr}(\Gamma_j^{-1} \mathbf{X}_m \mathbf{V}_{H_\gamma} \mathbf{X}_{m'}^t). \end{aligned}$$

Dans ce cas, la similarité avec les mises à jour obtenues par MCMC est moins flagrante. En MCMC en effet, les  $a_j^m$  sont simulées tour à tour et conditionnellement aux  $q_j^m$  et aux autres  $a_j^{m'}$ . Dans l'algorithme EM variationnel (VEM), on calcule les marginales et on intègre sur les autres variables ( $q_j^m$ ). Toutefois, une manière de montrer la cohérence avec les moments (7.9) de la loi gaussienne conditionnelle  $p(a_j^m | q_j^m = i, \mathbf{y}_j, \dots)$  est de supposer l'équivalent de  $q_j^m = i$  c'est-à-dire  $\tilde{p}_{Q_j^m}(i) = 1$  et  $\tilde{p}_{Q_j^m}(1-i) = 0$ . Dans l'équation (7.22) de la variance, le  $m$ -ième terme diagonal de  $\sum_i \Delta_{ij} + \tilde{\mathbf{H}}_j$  est alors égal à  $v_{i,m}^{-1} + \tilde{\mathbf{g}}_m^t \Gamma_j^{-1} \tilde{\mathbf{g}}_m + \text{tr}(\Gamma_j^{-1} \mathbf{X}_m \mathbf{V}_{H_\gamma} \mathbf{X}_m^t)$ . On retrouve dans les deux premiers termes une expression proche de (7.9) avec un troisième terme supplémentaire.

Pour la moyenne, le  $m$ -ième terme diagonal de  $\sum_i \Delta_{ij} \boldsymbol{\mu}_i + \tilde{\mathbf{G}}^t \Gamma_j^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{P}\ell_j)$  dans (7.21) est  $i \mu_{i,m} v_{i,m}^{-1} + \tilde{\mathbf{g}}_m^t \Gamma_j^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{P}\ell_j)$ . On retrouve ainsi le deuxième facteur dans l'expression (7.9) au remplacement de  $\mathbf{g}_m$  par  $\tilde{\mathbf{g}}_m$  et au terme  $\sum_{m' \neq m} a_j^{m'} \mathbf{g}_{m'}$

près. C'est dans ce dernier terme que s'exprime le conditionnement par les  $a_j^{m'}$  absent de la formulation variationnelle, ainsi que l'interaction entre les différentes conditions. Celle-ci se fait naturellement à travers le conditionnement par les  $a_j^{m'}$  en MCMC alors qu'elle se fait à travers des expressions matricielles plus complexes et des termes supplémentaires en VEM.

Pour la mise à jour de  $\tilde{p}_Q$ , les variables  $(\mathbf{a}^m, \mathbf{q}^m)$  constituent des couples indépendants dont les lois *a priori* respectives sont des modèles de Ising cachés respectivement de paramètre d'interaction  $\beta_m$ , sans champ externe et avec des distributions d'émission gaussiennes. Il en découle que  $\tilde{p}_Q(\mathbf{Q})$  a une forme produit :  $\tilde{p}_Q(\mathbf{Q}) = \prod_m \tilde{p}_{Q^m}(\mathbf{q}^m)$  avec  $\tilde{p}_{Q^m}(\mathbf{q}^m) = f(\mathbf{q}^m | \mathbf{a}^m = \mathbf{m}_{A^m}; \boldsymbol{\mu}_{\cdot, m}, \mathbf{v}_{\cdot, m}, \beta_m)$  où le membre de droite représente la loi conditionnelle pour une loi jointe notée  $f$  qui est la loi d'un champ de Ising caché modifié par rapport au champ de Ising caché *a priori*  $(\mathbf{a}^m, \mathbf{q}^m)$ . La modification consiste à remplacer les observations  $a_j^m$  par leur moyenne  $m_{A_j^m}$  (qui deviennent les *nouvelles* observations) et à ajouter un champ externe pour  $j \in J_\gamma$  et  $i \in \{0, 1\}$ ,  $\alpha_{i, j} = -v_{A_j^m A_j^m} / v_{i, m}$ , le paramètre de régularisation restant  $\beta_m$ . Toutefois l'expression du Ising caché modifié n'est pas disponible explicitement du fait de la fonction de partition. On peut cependant en trouver une approximation variationnelle, encore dite en *champ moyen*, comme précisé dans [CEL 03]. Cela revient à considérer l'approximation produit :  $\tilde{p}_{Q^m}(\mathbf{q}^m) \approx \prod_j \tilde{p}_{Q^m}(q_j^m | \{\tilde{q}_k^m, k \sim j\})$  avec  $\tilde{\mathbf{q}}^m$  un champ de valeurs fixées qui vérifient une équation de point fixe à résoudre. Cela résout le problème car les probabilités conditionnelles ci-dessus pour le champ de Ising caché  $\tilde{p}_{Q^m}$  sont maintenant calculables. Par ailleurs, en appliquant le principe du champ moyen, les  $\tilde{q}_k^m$  s'interprètent comme les valeurs moyennes du champ de Ising caché en chaque site  $k$ . D'autres approximations sont possibles, voir [CEL 03].

Pour la mise à jour des paramètres  $\Theta$ , l'expression (7.18) donne lieu à quatre mises à jour indépendantes. Les deux premières sont explicites. Notons  $\bar{p}_{im} = \sum_j \tilde{p}_{Q_j^m}(i)$  pour  $i \in \{0, 1\}$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \mu_{i, m} &= \sum_{j=1}^{J_\gamma} \frac{\tilde{p}_{Q_j^m}(i)}{\bar{p}_{im}} m_{A_j^m}, \quad v_{i, m} = \sum_{j=1}^{J_\gamma} \frac{\tilde{p}_{Q_j^m}(i)}{\bar{p}_{im}} \left( (m_{A_j^m} - \mu_{i, m})^2 + v_{A_j^m A_j^m} \right) \\ v_{\mathbf{h}} &= (D-1)^{-1} \mathbb{E}_{\tilde{p}_{H_\gamma}} [\mathbf{h}_\gamma^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}_\gamma] = (D-1)^{-1} (\mathbf{m}_{H_\gamma}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{m}_{H_\gamma} + \text{tr}(\mathbf{V}_{H_\gamma} \mathbf{R}^{-1})) \\ &= (D-1)^{-1} \text{tr}((\mathbf{V}_{H_\gamma} + \mathbf{m}_{H_\gamma} \mathbf{m}_{H_\gamma}^t) \mathbf{R}^{-1}). \end{aligned}$$

Concernant les paramètres des gaussiennes, pour la comparaison avec la procédure MCMC on peut regarder les lois *a posteriori* obtenues pour ces paramètres telles que détaillées dans [VIN 10b, Annexe A]. Reprenant les notations de [VIN 10b], lorsque dans les formules ci-dessus on pose  $\tilde{p}_{Q_j^m}(1) = 1$  pour  $j$  tel que  $q_j^m = 1$  dans la procédure MCMC, on retrouve  $\mu_{1, m} = \sum_{j \in C_{1, m}} m_{A_j^m} / J_{1, m}$ . Ceci est cohérent avec l'expression de  $\eta_{1, m}$  [VIN 10b, équation (A.4)] lorsque l'on remplace les  $a_j^m$  par les  $m_{A_j^m}$  (en variationnel, l'hyperparamètre  $a_{\mu_1}$  n'a pas lieu d'être). Pour les variances,

il vient  $v_{i,m} = \sum_{j \in C_{i,m}} ((m_{A_j^m} - \mu_{i,m})^2 + v_{A_j^m A_j^m}) / J_{i,m}$ , ce qui au terme  $v_{A_j^m A_j^m}$  près est cohérent avec la moyenne (cf. [VIN 10b, Eq. (A.4)]) de la loi inverse-gamma de  $v_{i,m}$  dans la procédure MCMC. Outre le fait qu'en MCMC, on conditionne pour ces calculs par les  $a_j^m$ , les différences observées sont dues à la présence d'hyperparamètres et de lois *a priori* qui n'existent pas dans l'algorithme VEM discuté ici.

Pour  $v_h$  on retrouve en VEM une expression cohérente avec la simulation de  $v_h$  en MCMC (cf. [MAK 08, § B.1]). Tandis que  $v_h$  est simulé conditionnellement à  $\mathbf{h}_\gamma$  fixé à sa valeur courante en MCMC, les expressions en  $\mathbf{h}_\gamma$  sont remplacées par leur espérance sous la loi approchante courante en VEM.

Les deux autres mises à jour (paramètres d'interaction  $\beta$  et paramètres de bruit) nécessitent une procédure de maximisation itérative. Pour les paramètres  $\beta_m$ , l'approximation produit ci-dessus [CEL 03] conduit à une équation pour laquelle on peut utiliser un algorithme de type gradient. On observe alors une tendance à la surestimation de ces paramètres. Ceci peut être compensé en partie en introduisant une loi *a priori*  $p(\beta_m)$  visant à réduire la valeur estimée  $\beta_m$ . Nous illustrons ainsi la possibilité mentionnée précédemment d'incorporer comme dans le cas MCMC des lois *a priori* sur les paramètres. Plus précisément, si l'on suppose que  $p(\beta_m)$  est une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_m$ , on a :

$$\begin{aligned} \beta_m &= \arg \max_{\beta'_m} E_{\tilde{p}_{Q^m}} [\ln p(\mathbf{q}^m | \beta'_m) p(\beta'_m)] \\ &= \arg \max_{\beta'_m} \{-\ln Z(\beta'_m) + \beta'_m (\sum_{j \sim k} E_{\tilde{p}_{Q^m}} [I(q_j^m = q_k^m)] - \lambda_m)\}. \end{aligned}$$

Si l'on dérive par rapport à  $\beta_m$ , on retrouve alors l'expression classique détaillée dans [CEL 03] dans laquelle on a soustrait la constante  $\lambda_m$  à la quantité usuelle  $\sum_{j \sim k} E_{\tilde{p}_{Q^m}} [I(q_j^m = q_k^m)]$  représentant le nombre moyen de cliques homogènes sous la loi approchante. Il est facile de voir que cette soustraction a pour effet de diminuer la valeur de  $\beta_m$  estimée comme souhaité.

Quant aux paramètres  $\{\ell_j, \sigma_j^2, \Lambda_j, j = 1..J_\gamma\}$ , ils satisfont une équation de point fixe que nous ne détaillons pas complètement. Dans le cas AR(1), on peut montrer que

$$\ell_j = (\mathbf{P}^t \Gamma_j^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^t \Gamma_j^{-1} (\mathbf{y}_j - \tilde{\mathbf{S}}_j \mathbf{m}_{H_\gamma}) = F_1(\rho_j) \quad (7.23)$$

On peut remarquer ainsi sur (7.23) une similarité avec [MAK 08, Eq. (B.2)] lorsqu'on remplace  $\mathbf{h}_\gamma$  et  $\mathbf{A}$  par  $\mathbf{m}_{H_\gamma}$  et  $\mathbf{m}_A$ . De manière similaire, on peut montrer que les valeurs optimales vérifient deux autres relations  $\sigma_j^2 = F_2(\rho_j, \ell_j)$  et  $\rho_j = F_3(\rho_j, \sigma_j^2)$ . Ceci permet alors de combiner ces différentes relations pour estimer  $\rho_j$  comme solution d'une équation de point fixe et d'en déduire ensuite  $\ell_j$  et  $\sigma_j$ .

## 7.6. Comparaison des deux types de solutions

Pour comparer les deux méthodes, un certain nombre de simulations ainsi que des expériences sur données réelles ont été conduites [CHA 11a].

**Expériences sur données simulées.** Dans un premier temps, nous avons simulé des données à partir de l'équation (7.1) et de la loi  $p(\mathbf{A} | \mathbf{Q})$  avec une matrice  $\mathbf{P}$  définie comme une base de transformée en cosinus discrète, un bruit blanc gaussien ( $\sigma_j^2 = 0.5$ ,  $\Lambda_j = \mathbf{I}_N$ ) et  $M = 2$  conditions expérimentales avec des rapports contraste à bruit (RCB) variables. Plus précisément, nous avons fixé :  $\mu_{1,1} = 2,8$ ,  $v_{1,1} = 0,3$  et  $\mu_{1,2} = 1,8$ ,  $v_{1,2} = 0,4$ , de sorte que  $\mu_{1,1}/v_{1,1} > \mu_{1,2}/v_{1,2}$ . Les autres variances  $v_{0,\cdot}$  sont fixées à 0,3. En suivant ce mélange, les NRN artificiels sont générés conditionnellement à des images binaires synthétiques de taille  $20 \times 20$  représentant les pixels activés et non activés (figure 7.6). Par ailleurs, le paradigme initial est constitué de 15 stimuli pour chacune des conditions. Les données simulées sont ainsi constituées de séries temporelles de 152 scans.

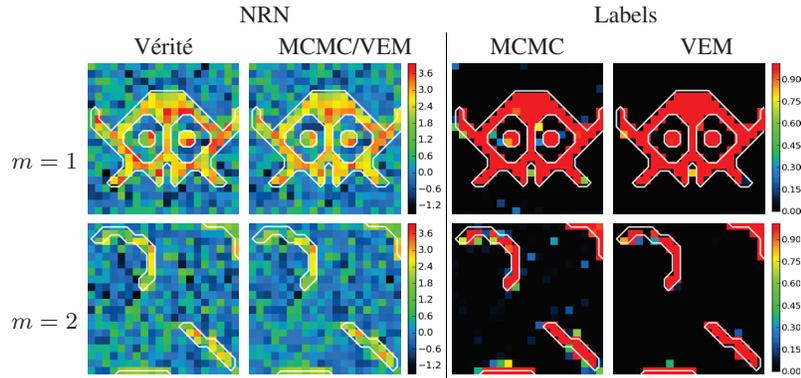


Figure 7.6 – A gauche : NRN simulés et estimés par MCMC et VEM (résultats très proches) ; à droite : *cartes de probabilité a posteriori* obtenues par l'approximation  $\tilde{p}_{Q_m}$  (VEM) et par l'estimateur du MMAP  $\hat{q}^m$  (MCMC).

Les deux procédures MCMC et VEM sont alors appliquées sur ces données. Nous nous plaçons d'abord sous le vrai modèle de bruit, *i.e.*, blanc gaussien comme dans les simulations. Les deux approches produisent des NRN très proches. Une légère différence est observée sur les probabilités d'activation *a posteriori* pour la condition avec un faible RCB ( $m = 2$ ). Ces probabilités sont données par  $p_{Q_j^m}(1)$  dans le cas variationnel et par  $\hat{q}_j^m(1)$  défini en section 7.4 dans le cas MCMC. Cette différence suggère un gain en robustesse en faveur de l'approche variationnelle. Les niveaux de régularisation spatiale estimés diffèrent également avec  $\hat{\beta}_1 = 0,78$ ,  $\hat{\beta}_2 = 0,92$  pour MCMC et  $\hat{\beta}_1 = 1,04$ ,  $\hat{\beta}_2 = 1,08$  pour VEM.

Pour une comparaison plus quantitative, des simulations additionnelles ont été effectuées avec des densités variables de stimuli (de 5 à 30), des variances de bruit variables et différents modèles de corrélation temporelle pour le bruit (structure AR pour  $\Lambda_i$ ). Les résultats sont illustrés en figure 7.7 qui montre (a) l'évolution de l'erreur en moyenne quadratique (EMQ) des NRN estimés en fonction du nombre de stimuli pour des simulations sous un modèle de bruit AR(2) alors que l'estimation suppose un bruit blanc gaussien comme précédemment.

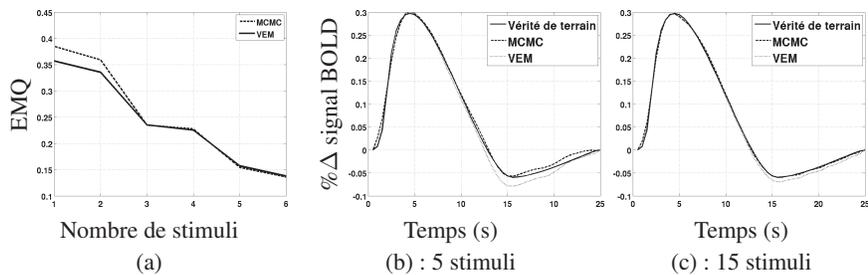


Figure 7.7 – (a) Evolution de l'EMQ des NRN en fonction du nombre de stimuli, (b)-(c) vérité de terrain et FRH estimées avec des inférences VEM et MCMC pour deux densités de stimuli différentes en utilisant un bruit AR(2).

La figure 7.7(a) montre que pour une densité de stimuli faible, *i.e.*, pour un faible rapport signal sur bruit (RSB), la version variationnelle est plus robuste. Pour des densités plus élevées (supérieures à 20) les deux approches se comportent de la même manière. Par ailleurs, les figures 7.7(b)-(c) montrent pour deux densités de stimulations différentes (5 et 15) les FRH estimées par rapport à la FRH canonique utilisée pour la simulation. Les principales caractéristiques (valeur du pic, temps d'arrivée au pic et *undershoot*) sont estimées correctement par les deux approches. Cependant, nous observons en figure 7.7(b) que pour une densité de stimuli faible, l'approche variationnelle est moins précise que son pendant stochastique au niveau de l'*undershoot*. Cette observation se confirme également lorsque l'on fait varier les trois caractéristiques ci-dessus de la vraie FRH utilisée dans les simulations. Toutefois, lorsque estimations et simulations sont faites avec le même modèle de bruit, les différences observées entre les deux approches sont minimales et non significatives.

Les figures 7.8(a)-(b) montrent l'évolution de l'EMQ des NRN en fonction du RSB lorsque l'on fait varier respectivement la variance du bruit et l'autocorrélation.

Dans ce dernier cas, les deux paramètres du modèle AR(2) sont modifiés de manière à maintenir un processus AR stable. Comme déjà observé dans [CAS 08], pour un RSB donné, une plus grande autocorrélation induit une augmentation de l'EMQ

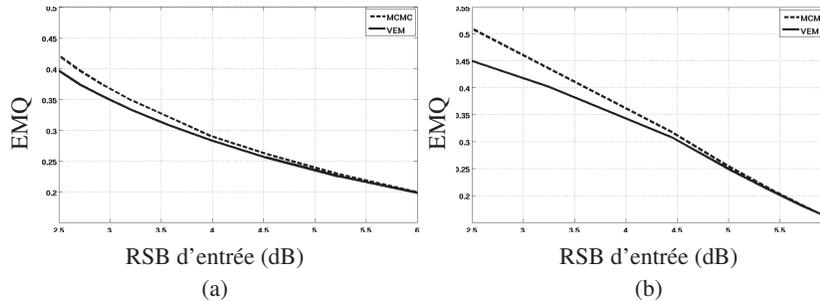


Figure 7.8 – Evolution de l’EMQ des NRN en fonction du RSB d’entrée (bruit AR(2)) (a) en variant la variance du bruit et (b) le niveau de corrélation du bruit AR(2).

plus importante que l’augmentation de la variance de bruit, et ceci pour les deux approches. Les deux méthodes se comportent d’ailleurs de la même manière sur une large plage de valeurs pour  $\text{RSB} \geq 5,5$  dB.

Enfin, l’avantage le plus notable de l’approche variationnelle réside dans les temps de calculs. Sur une architecture Intel Core 2 - 2,26 GHz - 2 Gb RAM, les résultats ont été obtenus environ 30 fois plus vite.

**Expériences sur données réelles.** Nous avons également considéré des données IRMf réelles issues d’une IRM 3T (Siemens Trio) avec une séquence à écho de gradient EPI ( $TE = 30$  ms/ $TR = 2,4$  s/ $FOV = 192$  mm<sup>2</sup>) et un paradigme issu d’un protocole *Localizer* [PIN 07]. L’acquisition réalisée comprend une seule session de  $N = 128$  scans de volumes 3D à la résolution  $2 \times 2 \times 3$  mm<sup>3</sup>. Le paradigme comprend dix conditions (phrases écoutées et lues, calculs induits auditivement et lus, clics gauches et droits induits auditivement et visuellement, damiers horizontaux et verticaux) réparties en soixante stimuli.

Nous nous sommes focalisés sur le contraste *calcul*-*phrase* (stimuli auditifs et visuels combinés) en prenant en compte les différences d’activations induites par les conditions *calcul* et *phrase* dans le sillon intrapariétal gauche, subdivisé en 17 parcelles pour les analyses de DEC. Le choix de cette région réside dans le fait qu’elle est susceptible d’induire une FRH qui s’écarte de la forme canonique. Une version étendue de ces résultats est présentée dans [CHA 12].

La figure 7.9 montre que les NRN estimés par les deux approches sont très proches et suivent de manière satisfaisante l’anatomie des sillons sous-jacente. Notons ici que seule la coupe la plus activée est visualisée en figure 7.9, où nous montrons aussi les deux estimations (MCMC et VEM) de la FRH dans la parcelle la plus activée qui comprend environ 200 voxels. Les FRH sont proches pour les deux approches et s’écartent clairement de la forme canonique notamment au niveau du temps d’arrivée au pic et de l’*undershoot*, *i.e.*, la déplétion post-activation. L’approche variationnelle

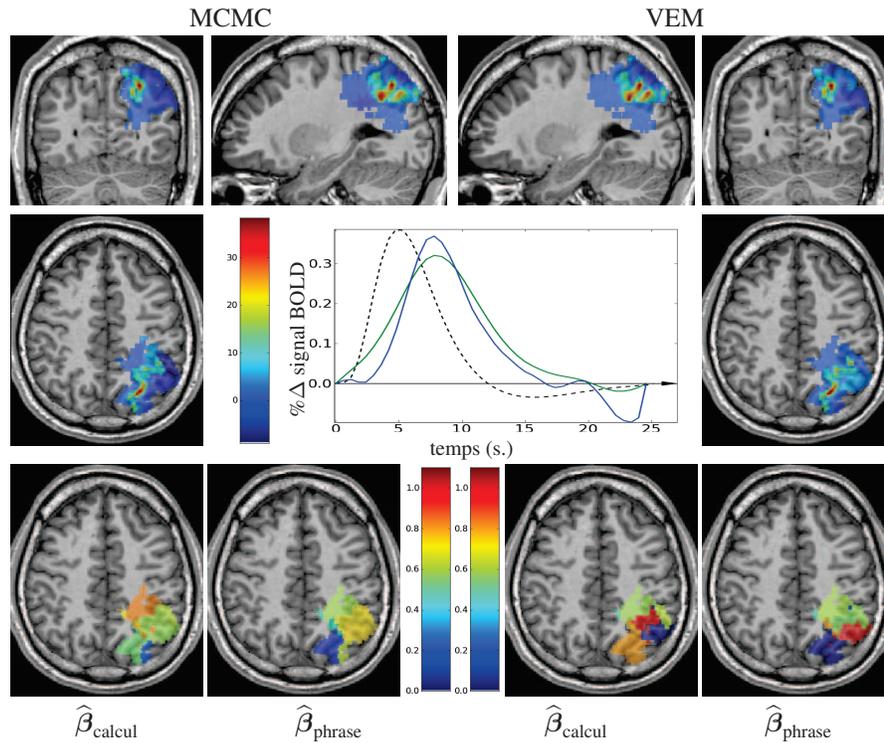


Figure 7.9 – Vues coronale (ligne du haut, extérieur), sagittale (ligne du haut, centre) et axiale (ligne du milieu) du contraste *calcul*-*phrase* estimé par DEC MCMC (à gauche) et VEM (à droite). Au centre : FRH estimée par MCMC (en vert) et par VEM (en bleu) ainsi que la FRH canonique en pointillés noirs. La ligne du bas montre les cartes de niveau de régularisation spatiale estimé pour les conditions *calcul* et *phrase* par MCMC (2 cartes de gauche respectivement) et par VEM (2 cartes de droite).

produit une FRH qui oscille davantage au niveau de cette déplétion mais ceci est à tempérer par le fait que de manière générale, l'estimation de la queue de la FRH est moins fiable que celle du pic pour lequel le niveau de signal BOLD est plus important. De plus, la nature événementielle du paradigme considéré ici n'est pas adaptée pour étudier précisément les caractéristiques de la queue de la FRH. Avec un paradigme événementiel lent pour lequel les réponses ne se chevauchent pas dans le temps, nos tests démontrent que ces oscillations disparaissent. Une solution pragmatique proposée pour résoudre cette question dans le cadre des paradigmes événementiels rapides consiste à introduire dans le dessin du paradigme des événements nuls, c'est-à-dire des durées légèrement plus longues sans stimulation, de façon à laisser le temps à la réponse hémodynamique de recouvrer sa ligne de base. Une autre voie consiste à

contraindre le modèle de la FRH à l'aide d'une approche semi-paramétrique comme dans [GEN 00, WOO 04a].

Par ailleurs, les niveaux de régularisation spatiale estimés, comme le montrent les cartes en bas de la figure 7.9, sont sensiblement différents d'une approche à l'autre, avec des niveaux estimés plus forts pour VEM. Toutefois, pour la parcelle s'activant le plus, on note pour les deux approches une cohérence avec le contraste obtenu : la valeur de  $\hat{\beta}$  est plus forte pour la condition `calcul` que pour la condition `phrase`. Enfin, pour ce qui est des temps de calculs, on observe, dans l'étude de cette parcelle, un même gain d'un facteur 30 pour l'approche variationnelle, comme sur les simulations.

## 7.7. Conclusion

Les expériences décrites dans la section précédente visaient essentiellement à comparer les deux approches VEM et MCMC proposées pour l'estimation du modèle DEC. Des résultats plus poussés sur l'approche DEC elle-même et sa comparaison avec d'autres modèles peuvent également être trouvés dans [BAD 11].

Les résultats de la section 7.6 confirment les attraits *classiques* de l'approche variationnelle, à savoir la simplicité de mise en œuvre, la rapidité des calculs, etc. Pour ce qui est de la comparaison avec la procédure MCMC, ce qui apparaît comme particulièrement avantageux est la simplicité du critère de convergence en variationnel et la possibilité d'étendre relativement facilement la procédure à des modélisations plus complexes incluant par exemple des bruits AR d'ordre supérieur ou un modèle d'habitation neurale. Les aspects sélection de modèles sont également à portée si l'on considère des critères de type vraisemblance pénalisée dont l'approche variationnelle peut fournir facilement une approximation [FOR 03].

En ce qui concerne les performances, elles sont souvent très proches pour les deux schémas d'inférence, si l'on s'intéresse comme ici aux estimateurs ponctuels. Des différences significatives apparaissent en revanche sur les mesures d'incertitudes sur ces estimateurs, *i.e.*, sur les variances d'estimation.

Ce résultat sur les estimateurs ponctuelles peut paraître étonnant dans la mesure où seule la procédure MCMC offre des garanties de convergence théoriques mais en réalité il peut cacher différentes situations. D'une part, cela n'exclut pas que l'approche variationnelle possède également dans certains cas les mêmes propriétés de convergence mais il n'existe pas à ce jour de résultat assez général sur la qualité de ces approximations. D'autre part, il n'est pas exclu que les simplifications introduites dans l'approche variationnelle sur la factorisation de la distribution cible induisent une plus grande robustesse vis-à-vis de certaines erreurs de modèle (stationnarité de la réponse, forme du bruit, ...).

Dans le cas précis de la DEC, on pourrait envisager une étude par simulations plus poussée pour tenter de mieux cerner à quel stade du modèle l'approximation variationnelle agit le plus et potentiellement indiquer si cette action est source d'erreurs importantes ou non. Un autre aspect intéressant observé dans nos simulations, et qui n'est pas contradictoire avec l'aspect approximation, est la plus grande robustesse de l'approche variationnelle aux erreurs du modèle.

Enfin, pour compléter la comparaison des approches et l'évaluation du potentiel de la solution variationnelle, il serait intéressant de mener avec celle-ci une analyse de groupe comme celle menée avec la procédure MCMC dans [BAD 11].

## 7.8. Bibliographie

- [AGU 98] AGUIRRE G., ZARAHN E., D'ESPOSITO M., « The variability of human, BOLD hemodynamic responses », *Neuroimage*, vol. 8, p. 360-369, 1998.
- [BAD 11] BADILLO S., VINCENT T., CIUCIU P., « Impact of the joint detection-estimation approach on random effects group studies in fMRI », *Proc. IEEE ISBI*, Chicago, IL, USA, p. 376-380, 2011.
- [BAI 97] BAILLET S., GARNERO L., « A Bayesian approach to introducing anatomofunctional priors in the EEG/MEG inverse problem », *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 44, n° 5, p. 374-385, 1997.
- [BAK 12] BAKHOUS C., FORBES F., VINCENT T., CHAARI L., DOJAT M., CIUCIU P., « Adaptive experimental condition selection in event-related fMRI », *Proc. IEEE ISBI*, Barcelona, Spain, p. 1755-1758, 2012.
- [BAU 11] BAUSCHKE H. H., COMBETTES P. L., *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, CMS books in Mathematics, Springer, 2011.
- [BOY 12] BOYER C., CIUCIU P., WEISS P., MÉRIAUX S., « HYR<sup>2</sup>PICS : Hybrid regularized reconstruction for combined parallel imaging and compressive sensing in MRI », *Proc. IEEE ISBI*, Barcelona, Spain, p. 66-69, 2012.
- [BRO 98] BROOKS S. P., GELMAN A., « General Methods for Monitoring Convergence of Iterative Simulations », *J. Comp. Graph. Statist.*, vol. 7, n° 4, p. 434-455, 1998.
- [BUC 98] BUCKNER R., « Event-related fMRI and the hemodynamic response », *Human Brain Mapping*, vol. 6, n° 5-6, p. 373-377, 1998.
- [BUX 98] BUXTON R. B., WONG E. C., FRANK L. R., « Dynamics of blood flow and oxygenation changes during brain activation : the balloon model », *Magn. Reson. Med.*, vol. 39, p. 855-864, 1998.
- [BUX 04] BUXTON R. B., ULUDAĞ K., DUBOWITZ D. J., LIU T. T., « Modeling the hemodynamic response to brain activation », *Neuroimage*, vol. 23, Supplement 1, p. S220-S233, 2004.

- [CAS 08] CASANOVA R., RYALI S., SERENCES J., YANG L., KRAFT R., LAURIENTI P. J., MALDJIAN J. A., « The impact of temporal regularization on estimates of the BOLD hemodynamic response function : a comparative analysis », *Neuroimage*, vol. 40, n° 4, p. 1606-1618, 2008.
- [CEL 03] CELEUX G., FORBES F., PEYRARD N., « EM procedures using mean field-like approximations for Markov model-based image segmentation », *Pattern Recognition*, vol. 36, p. 131-144, 2003.
- [CHA 11a] CHAARI L., FORBES F., VINCENT T., DOJAT M., CIUCIU P., « Variational solution to the joint detection estimation of brain activity in fMRI », *MICCAI*, LNCS 6892, Toronto, Canada, Springer, Berlin, p. 260-268, 2011.
- [CHA 11b] CHAARI L., PESQUET J.-C., BENAZZA-BENYAHIA A., CIUCIU P., « A wavelet-based regularized reconstruction algorithm for SENSE parallel MRI with applications to neuroimaging », *Med. Image Anal.*, vol. 15, n° 2, p. 185-201, 2011.
- [CHA 12] CHAARI L., VINCENT T., FORBES F., DOJAT M., CIUCIU P., Fast joint detection-estimation of evoked brain activity in event-related fMRI using a variational approach, Rapport, INRIA/CEA, 2012.
- [CIU 03] CIUCIU P., POLINE J.-B., MARRELEC G., IDIER J., PALLIER C., BENALI H., « Un-supervised robust non-parametric estimation of the hemodynamic response function for any fMRI experiment », *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 22, n° 10, p. 1235-1251, 2003.
- [CIU 04] CIUCIU P., IDIER J., ROCHE A., PALLIER C., « Outlier detection for robust region-based estimation of the hemodynamic response function in event-related fMRI », *Proc. IEEE ISBI*, Arlington, VA, USA, p. 392-395, 2004.
- [CIU 08] CIUCIU P., ABRY P., RABRAIT C., WENDT H., « Log wavelet leaders cumulant based multifractal analysis of EVI fMRI time series : evidence of scaling in ongoing and evoked brain activity », *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.*, vol. 2, n° 6, p. 929-943, 2008.
- [CIU 12] CIUCIU P., VAROQUAUX G., ABRY P., SADAGHIANI S., KLEINSCHMIDT A., « Scale-free and multifractal time dynamics of fMRI signals during rest and task », *Front. Physiol.*, vol. 3, n° Article 186, p. 1-18, 2012.
- [DAL 97] DALE A. M., BUCKNER R. L., « Selective averaging of rapidly presented individual trials using fMRI », *Human Brain Mapping*, vol. 5, p. 329-340, 1997.
- [DEM 77] DEMPSTER A. P., LAIRD N. M., RUBIN D. B., « Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm », *J. R. Statist. Soc. B*, vol. 39, p. 1-38, 1977.
- [DEP 08] DE PASQUALE F., DEL GRATTA C., ROMANI G., « Empirical Markov Chain Monte Carlo Bayesian analysis of fMRI data », *Neuroimage*, vol. 42, n° 1, p. 99-111, 2008.
- [DES 99] D'ESPOSITO M., ZARAHN E., AGUIRRE G. K., RYPMA B., « The effect of normal aging on the coupling of neural activity to the BOLD hemodynamic response », *Neuroimage*, vol. 10, n° 1, p. 6-14, 1999.
- [EKS 10] EKSTROM A., « How and when the fMRI BOLD signal relates to underlying neural activity : The danger in dissociation », *Brain Research Rev.*, vol. 62, n° 2, p. 233-244, 2010.

- [FOR 03] FORBES F., PEYRARD N., « Hidden Markov random field selection criteria based on mean field-like approximations », *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 25, n° 8, p. 1089-1101, 2003.
- [FOX 07] FOX M. D., RAICHLE M. E., « Spontaneous fluctuations in brain activity observed with functional magnetic resonance imaging », *Nat. Rev. Neurosci.*, vol. 8, n° 9, p. 700-11, 2007.
- [FRI 95] FRISTON K., HOLMES A. P., POLINE J.-B., GRASBY P., WILLIAMS S., FRACKOWIAK R., TURNER R., « Analysis of fMRI time-series revisited », *Neuroimage*, vol. 2, p. 45-53, 1995.
- [GEM 84] GEMAN S., GEMAN D., « Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images », *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. PAMI-6, n° 6, p. 721-741, 1984.
- [GEN 00] GENOVESE C., « A Bayesian time-course model for functional magnetic resonance imaging data (with discussion) », *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 95, p. 691-719, 2000.
- [GOU 00] GOUTTE C., NIELSEN F. A., HANSEN L. K., « Modeling the haemodynamic response in fMRI using smooth filters », *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 19, n° 12, p. 1188-1201, 2000.
- [GRA 11] GRAMFORT A., STROHMEIER D., HAUEISEN J., HAMALAINEN M., KOWALSKI M., « Functional brain imaging with M/EEG using structured sparsity in time-frequency dictionaries », SZÉKELY G., HAHN H. K., Eds., *IPMI*, vol. 6801, Springer, Berlin, p. 600-611, 2011.
- [GRE 03] GREICIUS M. D., KRASNOW B., REISS A. L., MENON V., « Functional connectivity in the resting brain : a network analysis of the default mode hypothesis », *Proc. Natl. Acad. Sci. Unit. States Am.*, vol. 100, n° 1, p. 253-258, 2003.
- [HAL 98] HALGREN E., MARINKOVIC K., CHAUVEL P., « Generators of the late cognitive potentials in auditory and visual oddball tasks », *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.*, vol. 102, n° 2, p. 156-164, 1998.
- [HAN 04] HANDWERKER D. A., OLLINGER J. M., D'ESPOSITO M., « Variation of BOLD hemodynamic responses across subjects and brain regions and their effects on statistical analyses », *Neuroimage*, vol. 21, p. 1639-1651, 2004.
- [HAS 70] HASTINGS W. K., « Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications », *Biometrika*, vol. 57, n° 1, p. 97-109, 1970.
- [HEN 00] HENSON R., ANDERSSON J., FRISTON K., « Multivariate SPM application to basis function characterisations of event-related fMRI responses », *Neuroimage*, vol. 11, p. 468, 2000.
- [HIG 98] HIGDON D. M., « Auxiliary variable methods for Markov chain Monte Carlo with applications », *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 93, n° 442, p. 585-595, 1998.
- [KAY 88] KAY S. M., *Modern Spectral Estimation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1988.

- [LIN 01] LINKENKAER-HANSEN K., NIKOULINE V. V., PALVA J. M., ILMONIEMI R. J., « Long-range temporal correlations and scaling behavior in human brain oscillations. », *J. Neurosciences*, vol. 21, n° 4, p. 1370-1377, 2001.
- [LOG 01] LOGOTHETIS N. K., PAULS J., AUGATH M., TRINATH T., OELTERMANN A., « Neurophysiological investigation of the basis of the fMRI signal », *Nature*, vol. 412, n° 6843, p. 150-157, 2001.
- [LUS 07] LUSTIG M., DONOHO D., PAULY J., « Sparse MRI : The application of compressed sensing for rapid MR imaging », *Magn. Reson. Med.*, vol. 58, n° 6, p. 1182-1195, 2007.
- [MAK 05] MAKNI S., CIUCIU P., IDIER J., POLINE J.-B., « Joint detection-estimation of brain activity in functional MRI : a multichannel deconvolution solution », *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, n° 9, p. 3488-3502, 2005.
- [MAK 08] MAKNI S., IDIER J., VINCENT T., THIRION B., DEHAENE-LAMBERTZ G., CIUCIU P., « A fully Bayesian approach to the parcel-based detection-estimation of brain activity in fMRI », *Neuroimage*, vol. 41, n° 3, p. 941-969, 2008.
- [MAR 03] MARRELEC G., BENALI H., CIUCIU P., PÉLÉGRINI-ISSAC M., POLINE J.-B., « Robust Bayesian estimation of the hemodynamic response function in event-related BOLD MRI using basic physiological information », *Human Brain Mapping*, vol. 19, n° 1, p. 1-17, 2003.
- [MAR 07] MARIN J.-M., ROBERT C. P., *Bayesian Core : A Practical Approach to Computational Bayesian Statistics*, Springer, 2007.
- [MIE 00] MIEZIN F. M., MACCOTTA L., OLLINGER J. M., PETERSEN S. E., BUCKNER R. L., « Characterizing the hemodynamic response : effects of presentation rate, sampling procedure, and the possibility of ordering brain activity based on relative timing », *Neuroimage*, vol. 11, p. 735-759, 2000.
- [NEA 98] NEAL R., HINTON G., « A view of the EM algorithm that justifies incremental, sparse and other variants », JORDAN M., Ed., *Learning in Graphical Models*, p. 355-368, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1998.
- [OGA 90] OGAWA S., LEE T., KAY A., TANK D., « Brain magnetic resonance imaging with contrast dependent on blood oxygenation », *Proc. Natl. Acad. Sci. Unit. States Am.*, vol. 87, n° 24, p. 9868-9872, 1990.
- [PEN 07] PENNY W., FLANDIN G., TRUJILLO-BARETO N., « Bayesian comparison of spatially regularised general linear models », *Human Brain Mapping*, vol. 28, n° 4, p. 275-293, 2007.
- [PIN 07] PINEL P., THIRION B., MÉRIAUX S., JOBERT A., SERRES J., LE BIHAN D., POLINE J.-B., DEHAENE S., « Fast reproducible identification and large-scale databasing of individual functional cognitive networks », *BMC Neurosci.*, vol. 8, n° 1, p. 91, 2007.
- [PRU 99] PRUESSMANN K. P., WEIGER M., SCHEIDEGGER M., BOESIGER P., « SENSE : Sensitivity encoding for fast MRI », *Magn. Reson. Med.*, vol. 42, p. 952-962, 1999.
- [RIC 03] RICHTER W., RICHTER M., « The shape of the fMRI BOLD response in children and adults changes systematically with age », *Neuroimage*, vol. 20, n° 2, p. 1122-1131, 2003.

- [RIE 04] RIERA J. J., WATANABE J., KAZUKI I., NAOKI M., AUBERT E., OZAKI T., KAWASHIMAA R., « A state-space model of the hemodynamic approach : nonlinear filtering of BOLD signals », *Neuroimage*, vol. 21, p. 547-567, 2004.
- [RIS 11] RISSER L., VINCENT T., FORBES F., IDIER J., CIUCIU P., « Min-max extrapolation scheme for fast estimation of 3D Potts field partition functions. Application to the joint detection-estimation of brain activity in fMRI », *J. Sig. Proc. Syst.*, vol. 65, n° 3, p. 325-338, 2011.
- [ROB 07] ROBERT C. P., *The Bayesian Choice : From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation*, Springer, 2007.
- [SEK 05] SEKIHARA K., SAHANI M., NAGARAJAN S. S., « Localization bias and spatial resolution of adaptive and non-adaptive spatial filters for MEG source reconstruction », *Neuroimage*, vol. 25, n° 4, p. 1056-1067, 2005.
- [SMI 03] SMITH M., PÜTZ B., AUER D., FAHRMEIR L., « Assessing brain activity through spatial Bayesian variable selection », *Neuroimage*, vol. 20, p. 802-815, 2003.
- [SWA 98] SWARTZ B., GOLDENSOHN E., « Timeline of the history of EEG and associated fields », *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol.*, vol. 102, n° 2, p. 173-176, 1998.
- [VIN 10a] VINCENT T., RISSER L., CIUCIU P., « Spatially adaptive mixture modeling for analysis of within-subject fMRI time series », *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 29, n° 4, p. 1059-1074, 2010.
- [VIN 10b] VINCENT T., Modèles hémodynamiques spatiaux adaptatifs pour l'imagerie cérébrale fonctionnelle, Thèse de doctorat, Univ. Paris-Sud, Orsay, 2010.
- [WOO 01] WOOLRICH M., RIPLEY B., BRADY M., SMITH S., « Temporal autocorrelation in univariate linear modelling of fMRI data », *Neuroimage*, vol. 14, n° 6, p. 1370-1386, 2001.
- [WOO 04a] WOOLRICH M., JENKINSON M., BRADY J., SMITH S., « Fully Bayesian spatio-temporal modelling of fMRI data », *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol. 23, n° 2, p. 213-231, 2004.
- [WOO 04b] WOOLRICH M., JENKINSON M., BRADY J. M., SMITH S., « Constrained linear basis set for HRF modelling using variational Bayes », *Neuroimage*, vol. 21, n° 4, p. 1748-1761, 2004.
- [ZAR 97] ZARAHN E., AGUIRRE G. K., D'ESPOSITO M., « Empirical analysis of BOLD fMRI statistics. I. Spatially unsmoothed data collected under null-hypothesis conditions », *Neuroimage*, vol. 5, n° 3, p. 179-197, 1997.

## Chapitre 8

# Approches MCMC et variationnelle de l'inversion bayésienne en imagerie de diffraction

### 8.1. Introduction

Le terme « imagerie de diffraction » est à prendre, ici, au sens d'un « problème inverse de diffraction » où le but est de reconstruire une image d'un objet inconnu (une cartographie de ses paramètres physiques tels que la permittivité diélectrique) à partir de la mesure du champ (dit diffracté) résultant de son interaction avec une onde interrogatrice (dite onde incidente) connue. Ce type de problèmes se rencontre dans de nombreuses applications d'imagerie ou de contrôle non destructif. Il correspond à la situation où la recherche d'un bon compromis entre la résolution de l'image (le plus petit détail observable) et la pénétration de l'onde incidente dans les milieux interrogés conduit à choisir la longueur d'onde de cette dernière dans le domaine dit de « résonance », au sens où elle est de l'ordre de grandeur des dimensions caractéristiques ou des inhomogénéités de l'objet sous test. L'interaction onde-objet donne alors lieu à des phénomènes de diffraction importants. C'est le cas des deux applications que nous considérons ici, où les ondes interrogatrices sont des ondes électromagnétiques dont les longueurs d'onde se situent dans le domaine des micro-ondes et celui de l'optique et où les dimensions caractéristiques des objets recherchés sont de l'ordre de 1 cm et 1  $\mu\text{m}$ , respectivement.