



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE



Competence Center Environment and Sustainability

# Processus Max-stables, Vraisemblance Composite et Extrêmes Spatiaux

Mathieu Ribatet

École Polytechnique Fédérale de Lausanne,  
Chaire de Statistique  
(Prof. Anthony Davison)

23 Septembre 2008

## Mise en contexte

- ▶ Les risques naturels sont bien souvent spatiaux (températures, pluie, vents, . . .)
- ▶ La caractérisation des valeurs extrêmes en un nombre fini de stations n'est pas suffisante
- ▶ L'analyse des extrêmes spatiaux n'est pas facile (littérature quasi nulle)
- ▶ Le but est de présenter une approche basée sur l'EVT permettant leur analyse

# Géostatistiques ?

- ▶ Soit  $Y(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  un processus aléatoire (par ex. pluie avec  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ )
- ▶ Classiquement,  $Y(\cdot)$  est modélisé par un processus Gaussien stationnaire entièrement défini par :
  - sa moyenne  $\mu(\mathbf{x})$
  - sa covariance  $\text{Cov}(Y(\mathbf{x}_1), Y(\mathbf{x}_2)) = \sigma^2 \rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$
- ▶  $\mu(\mathbf{x})$  sera souvent modélisé par une surface de réponse :

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^p \beta_r s(\mathbf{x})$$

- ▶ Alors que  $\rho$  sera modélisé par ex. par :

**Whit-Mat**  $\rho(h) = \frac{2^{1-\text{smooth}}}{\Gamma(\text{smooth})} \left(\frac{h}{\text{scale}}\right)^{\text{smooth}} K_{\text{smooth}}\left(\frac{h}{\text{scale}}\right)$

**Pow. Exp.**  $\rho(h) = \exp\left[-\left(\frac{h}{\text{scale}}\right)^{\text{smooth}}\right]$

## Géostatistiques ? (2)

- ▶ L'hypothèse essentielle est donc que  $Y(.) \sim PG$
- ▶ On sait que la loi Normale ( $d \geq 2$ ) est asymptotiquement indépendante<sup>1</sup>
- ▶ Donc asymptotiquement, les extrêmes sont indépendants dans l'espace ! ( $Y(x_1) \stackrel{asymp.}{\perp} Y(x_2)$ )
- ▶ Clairement les géostatistiques (classiques) risquent alors de sous-estimer la probabilité d'avoir, par ex., une forte inondation sur une région d'étude
- ▶ La même remarque s'applique à l'anamorphose Gaussienne (Copules Gaussiennes)

---

<sup>1</sup> $\Pr[Y_1 > y | Y_2 > y] \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty$

## Processus « Caché »

- ▶ Soit  $Z(\mathbf{x}) = \max Y(\mathbf{x})$
- ▶ Selon l'EVT,  $Z(\mathbf{x}) \approx GEV(\mu(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x}))$
- ▶ Le processus « caché » gouverne  $(\mu(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x}))$ , par exemple par des PG indépendants

$$\mathbb{E}[\mu(\mathbf{x})] = \mu_\mu(\mathbf{x}), \quad \text{Cov}(\mu(\mathbf{x}_1), \mu(\mathbf{x}_2)) = \sigma_\mu^2 \rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

$$\mathbb{E}[\sigma(\mathbf{x})] = \mu_\sigma(\mathbf{x}), \quad \text{Cov}(\sigma(\mathbf{x}_1), \sigma(\mathbf{x}_2)) = \sigma_\sigma^2 \rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

$$\mathbb{E}[\xi(\mathbf{x})] = \mu_\xi(\mathbf{x}), \quad \text{Cov}(\xi(\mathbf{x}_1), \xi(\mathbf{x}_2)) = \sigma_\xi^2 \rho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

- ▶ Le tout est intégré dans un modèle Bayésien hiérarchique

$$\pi(\theta|\mathbf{z}) \propto p_{GEV}(Z(\mathbf{x})|\mu(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x})) p_{PG}(\mu(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x})|\theta_{PG}) \\ \times \text{priors}$$

## Processus « caché » (2)

- ▶ Bien que les marges soient GEV
- ▶ La distribution jointe n'est plus une MEVD
- ▶ Le modèle suppose que, conditionnellement à  $(\mu(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x}))$ ,  $Z(\mathbf{x}_1) \perp Z(\mathbf{x}_2)$ ,  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$
- ▶ Nous allons présenter une classe de modèles issue de l'EVT plus adaptée aux extrêmes

# Processus Max-stables

## Définition

Un processus max-stable  $Z(x)$  est le processus limite des maxima de champs aléatoires  $Y_i(x)$  *i.i.d*,  $x \in \mathbb{R}^d$ . Plus précisément :

$$Z(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\max Y_i(x) - b_n(x)}{a_n(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (1)$$

où  $a_n(\cdot)$ ,  $b_n(\cdot)$  sont 2 suites de fonctions  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$

- ▶ Les proc. max-stable sont la généralisation des distributions des valeurs extrêmes au contexte spatial
- ▶ Ce sont donc des candidats idéaux pour la modélisation des extrêmes spatiaux
- ▶ Dans la suite, on supposera des marges Fréchet unitaires.

## Caractérisation de Schlather [2002]

Soient  $Y$  un proc. stationnaire sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mu = \mathbb{E}[\max(0, Y(o))]$  finie et  $\Pi$  un proc. de Poisson sur  $(0, +\infty)$  d'intensité  $d\Lambda = \mu^{-1}s^{-2}ds$  et  $Y_s$  rép. ind. de  $Y$ .

$$Z(x) = \sup_{s \in \Pi} s Y_s(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

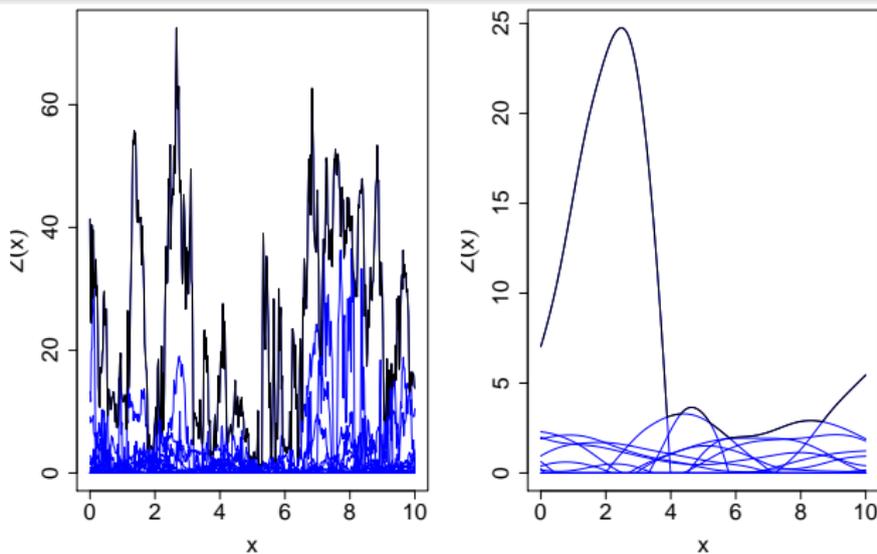


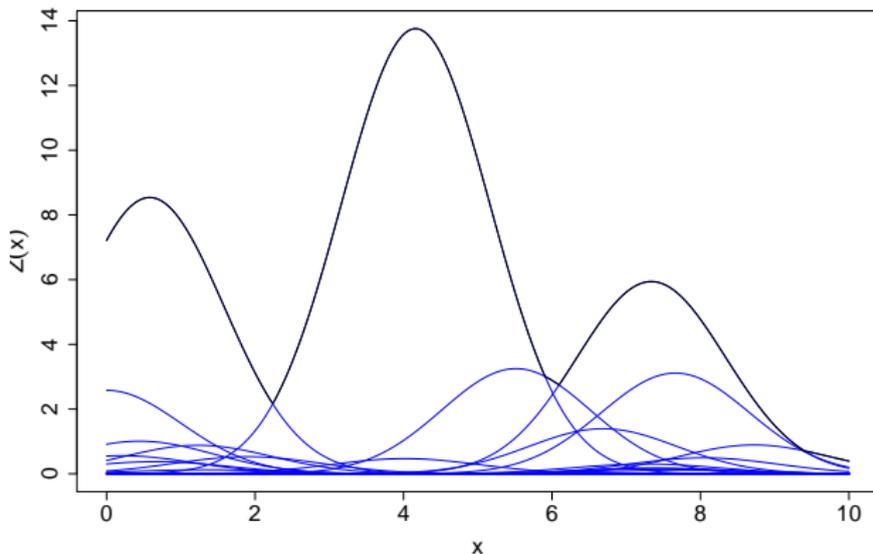
FIG.: 2 réalisations de Schlather. Whittle-Matérn d'ordre 0.5 et 4.

## Caractérisation de Smith [1991, article non publié]

Soit  $\Pi$  un proc. de Poisson sur  $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$  d'intensité  $d\Lambda = dys^{-2}ds$ .

$$Z(x) = \sup_{(y,s) \in \Pi} sf(x-y), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

où  $f$  est positive et telle que  $\int f(x)dx = 1$ .



## 2 FDR bivariées de processus max-stable (1/2)

### Le modèle de Schlather

Si l'on suppose de plus que  $Y$  est un processus Gaussien stationnaire centré réduit ayant une fonction de corrélation  $\rho$ .

Alors on peut montrer que :

$$F(z_1, z_2) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left( 1 + \sqrt{1 - 2(\rho(h) + 1) \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}} \right) \right]$$

où  $h$  est la distance (euclidienne) entre les sites 1 et 2, et  $\rho(h)$  est une fonction de corrélation valide telle que  $-1 \leq \rho(h) \leq 1$ .

## 2 FDR bivariées de processus max-stable (1/2)

### Le modèle de Smith

Si l'on suppose de plus que  $f(x - y)$  est la densité d'une loi normale de moyenne  $y$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ . Alors, on peut montrer que :

$$F(z_1, z_2) = \exp \left[ -\frac{1}{z_1} \Phi \left( \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_2}{z_1} \right) - \frac{1}{z_2} \Phi \left( \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_1}{z_2} \right) \right]$$

où  $\Phi$  est la FDR  $N(0,1)$ ,  $a^2 = \Delta x^T \Sigma^{-1} \Delta x$  et  $\Delta x$  est le « vecteur distance » entre les deux positions 1 et 2.

**a est en fait la dist. de Mahalanobis**

- ▶ Par exemple pour  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

- ▶ Dans la suite, je ne considérerai que ce modèle

## Vraisemblance composite

- ▶ Seule la densité bivariée est connue analytiquement
- ▶ Comment faire du maximum de vraisemblance alors ?
- ▶ Nous allons utiliser la **vraisemblance composite**

### Vraisemblance composite

Soit  $\{f(y; \theta), y \in \mathcal{Y}, \theta \in \Theta\}$  un modèle statistique paramétrique, où  $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $n \geq 1$  et  $d \geq 1$ .

Considérons un ensemble d'événements  $\{\mathcal{A}_i : \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{F}, i \in I\}$ , où  $I \subseteq \mathbb{N}$  et  $\mathcal{F}$  est une  $\sigma$ -algèbre sur  $\mathcal{Y}$ .

Une log-vraisemblance composite est définie par :

$$\ell_c(\theta; y) = \sum_{i \in I} w_i \log f(y \in \mathcal{A}_i; \theta)$$

où  $f(y \in \mathcal{A}_i; \theta) = f(\{y_j \in \mathcal{Y} : y_j \in \mathcal{A}_i\}; \theta)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  et  $\{w_i, i \in I\}$  est un ensemble de poids.

## Pourquoi cela marche ?

- ▶ Commençons par remarquer que la **vraisemblance totale** est un cas particulier de la **vraisemblance composite** ( $\mathcal{A}_i = \mathcal{Y}$ )
- ▶ Pour  $i$  fixé, chaque  $\log f(\mathbf{y} \in \mathcal{A}_i; \theta)$  est une log-vraisemblance valide
- ▶ Chaque terme de  $\ell_c(\theta; \mathbf{y})$  conduit à une équation du score non biaisée :

$$\nabla \log f(\mathbf{y} \in \mathcal{A}_i; \theta) = 0$$

- ▶  $\nabla \ell_c(\theta; \mathbf{y}) = \sum_{i \in I} w_i \nabla \log f(\mathbf{y} \in \mathcal{A}_i; \theta) = 0$  est non biaisée
- ▶ Dans la suite nous considérerons la **vraisemblance par paires**

$$\ell_p(\mathbf{y}; \psi) = \sum_{i < j} \sum_{k=1}^n \log f(y_k^{(i)}, y_k^{(j)})$$

# Rappel sur la théorie de la vraisemblance

- ▶ Nous savons tous que :

$$\hat{\psi}_{MLE} \sim \mathcal{N} \left( \psi, -H(\psi)^{-1} \right), \quad n \rightarrow +\infty$$

où  $H(\psi) = \mathbb{E}[\nabla^2 \ell(\psi; \mathbf{Y})]$

- ▶ Lorsque le modèle est **misspécifié** (comme avec la vrais. par paires), la distribution asymptotique devient :

$$\hat{\psi}_p \sim \mathcal{N} \left( \psi, H(\psi)^{-1} J(\psi) H(\psi)^{-1} \right), \quad n \rightarrow +\infty$$

où  $J(\psi) = \text{Var}[\nabla \ell_p(\psi; \mathbf{Y})]$

- ▶ Lorsque le modèle est « bien spécifié »,  $H(\psi) = -J(\psi)$

## Performance du MCLE (Simulations)

- ▶ Domaine :  $\mathcal{X} = [0, 40] \times [0, 40]$
- ▶ Région : 50 sites et 100 obs./site
- ▶ 500 simulations du modèle de Smith pour 5 configurations différentes

	$\sigma_1^2$	$\sigma_{12}$	$\sigma_2^2$	Dépendance
Conf.1	300	0	300	isotropie
Conf.2	200	0	300	anisotropie
Conf.3	200	150	300	moyenne
Conf.4	2000	1500	3000	forte
Conf.5	20	15	30	faible

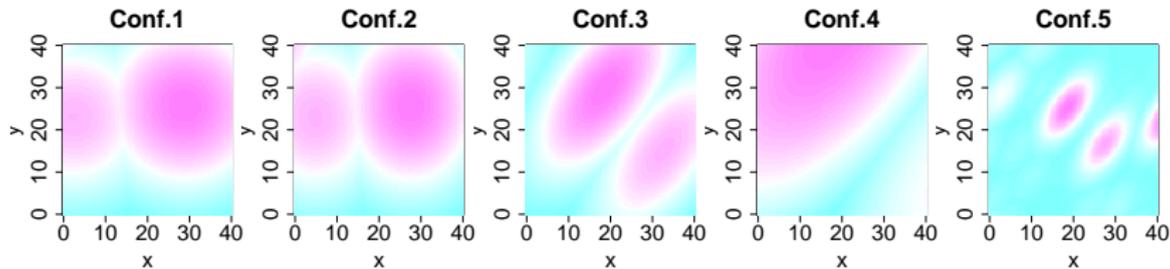


FIG.: Une réalisation pour chacune des configurations

# Résultat

TAB.: Performance du MCLE. Sont reportés :  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\psi}_{p,i}$  (valeur théo) / std. err. « sandwich » (std. err. empirique)

	$\hat{\sigma}_1^2$ / std. err.	$\hat{\sigma}_2^2$ / std. err.	$\hat{\sigma}_{12}^2$ / std. err.
Conf.1	306.13 (300) / 40.59 (44.70)	305.74 (300) / 39.80 (41.54)	1.35 (0) / 27.91 (27.74)
Conf.2	203.95 (200) / 26.70 (28.54)	305.35 (300) / 39.55 (39.66)	-0.95 (0) / 21.92 (21.23)
Conf.3	201.84 (200) / 25.09 (26.10)	299.53 (300) / 37.34 (37.88)	150.01 (150) / 25.53 (26.13)
Conf.4	2053.37 (2000) / 495.22 (300.10)	3065.76 (3000) / 664.79 (483.11)	1550.15 (1500) / 412.00 (322.37)
Conf.5	19.99 (20) / 1.53 (1.55)	29.89 (30) / 2.30 (2.29)	14.95 (15) / 1.55 (1.60)

- ▶ Les estimations de  $\theta$  sont sans biais
- ▶ L'estimation des std. err. sont cohérentes
- ▶ Std. err : Problème avec Conf.4

Hypothèses de régularités non vérifiées ?

$$(\hat{\theta} \in \partial\Theta = \bar{\Theta} \setminus \overset{\circ}{\Theta}?)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2000 & 1500 \\ 1500 & 3000 \end{bmatrix} \implies \lambda_{1,2}(\Sigma^{-1}) = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{7500} \approx 10^{-3}, 10^{-4}$$

Estimation de  $H$  peu fiable ?

# Sélection sous vraisemblance composite

## Akaike Information Criteria

Lorsque plusieurs modèles  $M_0, M_1, \dots$  sont ajustés sur nos données ; on aura tendance à privilégier celui minimisant :

$$AIC = -2\ell(\hat{\theta}_{MLE}; y) + 2p$$

où  $p$  est le nombre de paramètres à estimer.

- ▶ Sous misspécification, on préférera la statistique

$$TIC = -2\ell(\hat{\theta}; y) - 2\text{tr} \left\{ J(\psi)H(\psi)^{-1} \right\}$$

- ▶ Lorsque le modèle est « bien spécifié » alors

$$J(\psi) = -H(\psi), \quad \mathbb{E} \left[ \nabla^2 \ell(\theta; y) \right] + \text{Var} [\nabla \ell(\theta; y)] = 0$$

de sorte que

$$TIC = -2\ell(\hat{\theta}; y) + 2\text{tr} \{ \mathbb{I}_p \} = AIC$$

## Test de Déviance sous misspécification

- ▶ Soit  $\{f(y; \theta), y \in \mathcal{Y}, \theta \in \Theta\}$  notre modèle statistique
- ▶ Supposons que  $\theta^T = (\psi^T, \phi^T)$  où  $\psi$  et  $\phi$  sont des vecteurs de dimension  $p$  et  $q$ .
- ▶ Testons  $H_0 : \psi = \psi_0$  contre  $H_1 : \psi \neq \psi_0$
- ▶ Sous modèles « bien spécifiés »,

$$W(\psi_0) = 2\ell(\hat{\theta}; y) - 2\ell(\psi_0, \hat{\phi}_{\psi_0}; y) \xrightarrow{D} \chi_p^2$$

- ▶ Sous misspécification, ce résultat est légèrement altéré

$$W(\psi_0) = 2\ell_c(\hat{\theta}; y) - 2\ell_c(\psi_0, \hat{\phi}_{\psi_0}; y) \xrightarrow{D} \eta = \sum_{i=1}^p \lambda_i X_i$$

où les  $X_i$  sont  $p$  v.a.i.i.d. de loi  $\chi_1^2$  et les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $(H^{-1} J H^{-1})_{\psi} \{-(H^{-1})_{\psi}\}^{-1}$ ,  $M_{\psi} = M["\psi", "\psi"]$

- ▶ Modèle « bien spécifié »,  $(H^{-1} J H^{-1})_{\psi} \{-(H^{-1})_{\psi}\}^{-1} = \mathbb{I}_p$

- ▶ La distribution de  $\eta = \sum_{i=1}^p \lambda_i X_i$  n'est pas accessible
- ▶ Deux approches sont possibles :
  - Approximer la distribution de  $\eta$  (RJ)

$$\eta \approx \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i X_i$$

- Ajuster  $W(\psi_0)$  de sorte que la distribution  $\chi_p^2$  soit valide (CB)

$$W_{adj}(\psi_0) = 2c \left\{ \ell_{adj}(\hat{\theta}; \mathbf{y}) - \ell_{adj}(\psi_0, \hat{\phi}_{\psi_0}; \mathbf{y}) \right\}$$

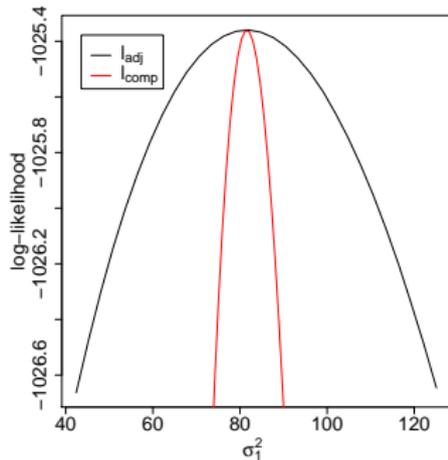
où  $c$  est une approximation quadratique et

$$\ell_{adj}(\theta) = \ell_c(\theta_*), \quad \theta_* = \hat{\theta} + C(\theta - \hat{\theta})$$

avec

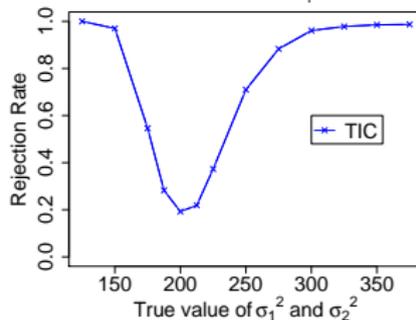
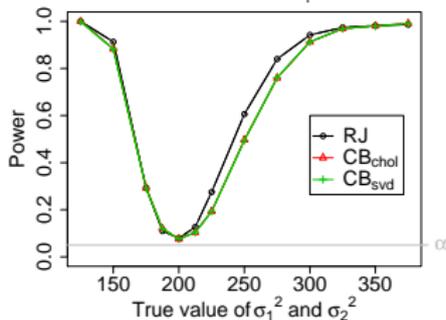
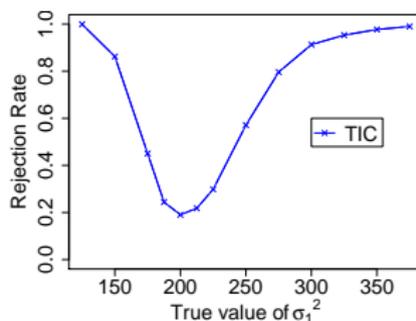
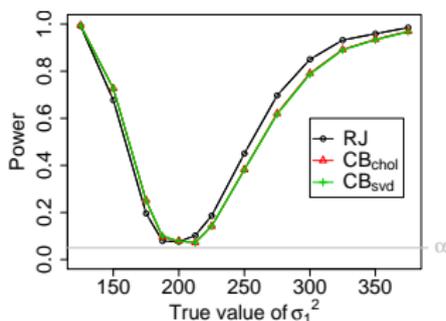
$$C = M^{-1} M_{adj}, \quad M^T M = H, \quad M_{adj}^T M_{adj} = H^{-1} J H^{-1}$$

$M_{adj}$  et  $M$  « racines carrés de matrices » non uniques si  $dim > 1$ !!! (Cholesky, SVD)



# Puissance du test et Pouvoir discriminant du TIC

- ▶ Domaine :  $\varkappa = [0, 40] \times [0, 40]$
- ▶ Région : 50 sites et 100 obs./site
- ▶ Modèle de Smith  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 150 \\ 150 & 300 \end{bmatrix}$ ,  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 150 \\ 150 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$
- ▶  $H_0 : \sigma_1^2 = 200$  ( $= \sigma_2^2$ ) contre  $H_1$  : compl.



## Mise en place du modèle

- ▶ Comme pour les géostatistiques, nous avons besoin de surfaces de réponse pour les paramètres de la GEV

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \beta_{\mu,i} \mathbf{s}(\mathbf{x})$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \beta_{\sigma,i} \mathbf{s}(\mathbf{x})$$

$$\xi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \beta_{\xi,i} \mathbf{s}(\mathbf{x})$$

- ▶ Assez flexibles pour modéliser correctement  $(\mu(\cdot), \sigma(\cdot), \xi(\cdot))$  sur la région d'étude
- ▶ Pour Schlather, il faut en plus un choix pour  $\rho(h)$

# Application : Précipitations Journalières USA



- ▶ 46 stations (91 obs./stations)
- ▶  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ , alt cov. supp.
- ▶ Modèle de Smith (anisotropie)

Models		$-\ell_p$	Dof	TIC
$M_0$ :	$\mu(\mathbf{x}) = \alpha_0 + \alpha_1(\text{lat}) + \alpha_2(\text{alt}) + \alpha_3(\text{lon})$ $\sigma(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1(\text{lat}) + \beta_2(\text{alt}) + \beta_2(\text{lon})$ $\xi(\mathbf{x}) = \gamma_0$	412110.2	12	12,848,229
$M_1$ :	$\mu(\mathbf{x}) = \alpha_0 + \alpha_1(\text{lat}) + \alpha_2(\text{alt})$ $\sigma(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1(\text{lat}) + \beta_2(\text{alt}) + \beta_3(\text{lon})$ $\xi(\mathbf{x}) = \gamma_0$	412110.9	11	16,096,068
$M_2$ :	$\mu(\mathbf{x}) = \alpha_0 + \alpha_1(\text{lat}) + \alpha_2(\text{alt}) + \alpha_3(\text{lon})$ $\sigma(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1(\text{lat}) + \beta_2(\text{alt})$ $\xi(\mathbf{x}) = \gamma_0$	412113.3	11	1,008,997
$M_3$ :	$\mu(\mathbf{x}) = \alpha_0 + \alpha_1(\text{lat}) + \alpha_3(\text{lon})$ $\sigma(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1(\text{lat}) + \beta_2(\text{alt}) + \beta_3(\text{lon})$ $\xi(\mathbf{x}) = \gamma_0$	412234.1	11	1,926,389,242
$M_4$ :	$\mu(\mathbf{x}) = \alpha_0 + \alpha_1(\text{lat}) + \alpha_2(\text{alt}) + \alpha_3(\text{lon})$ $\sigma(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1(\text{lat}) + \beta_3(\text{lon})$ $\xi(\mathbf{x}) = \gamma_0$	412380.5	11	33,209,042
<b><math>M_5</math> :</b>	<b><math>\mu(\mathbf{x}) = \alpha_0 + \alpha_1(\text{lat}) + \alpha_2(\text{alt})</math></b> <b><math>\sigma(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1(\text{lat}) + \beta_2(\text{alt})</math></b> <b><math>\xi(\mathbf{x}) = \gamma_0</math></b>	<b>412113.3</b>	<b>10</b>	<b>1,008,261</b>
$M_6$ :	$\mu(\mathbf{x}) = \alpha_0 + \alpha_1(\text{lat})$ $\sigma(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1(\text{lat}) + \beta_2(\text{alt})$ $\xi(\mathbf{x}) = \gamma_0$	412237.3	9	1,086,347

# Modélisation des marges GEV + Niveaux de Retour

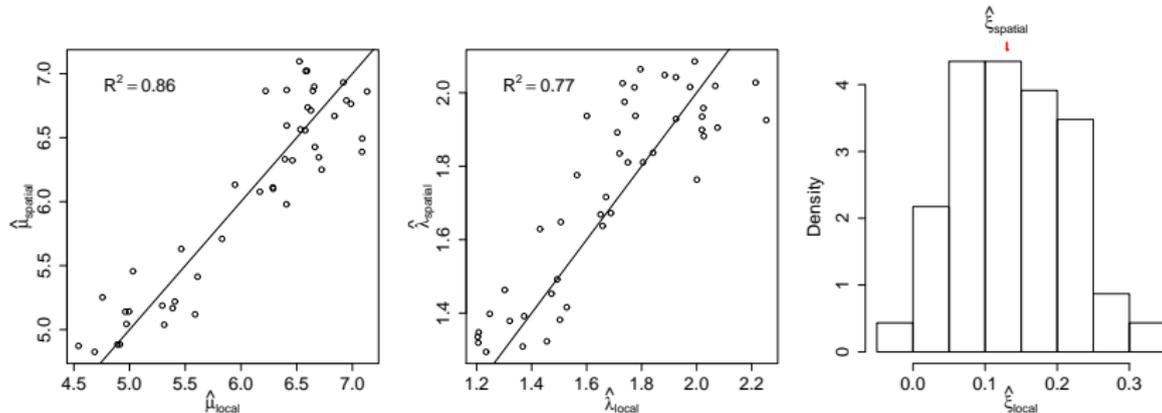


FIG.: Paramètres de la GEV estimés localement et spatialement

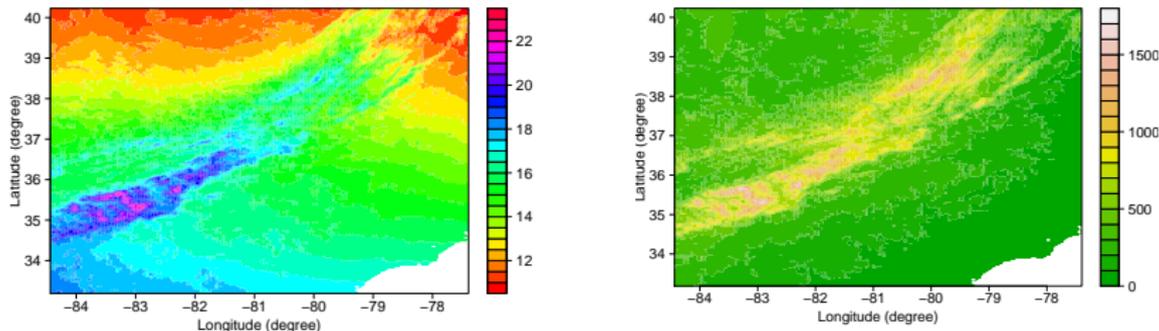


FIG.: Niveaux de retour spatiaux ( $T = 50$  ans, cm) (gauche) et altitude (droite, mètres)

## Coefficient Extrême

- ▶ Si l'on suppose<sup>2</sup> que les marges sont Fréchet unitaires alors

$$\Pr [Z(x_1) \leq z, Z(x_2) \leq z] = \exp \left( -\frac{\theta(x_2 - x_1)}{z} \right)$$

où  $1 \leq \theta(x_2 - x_1) \leq 2$

- ▶  $\theta(x_2 - x_1) = 1 \iff$  dépendance parfaite
- ▶  $\theta(x_2 - x_1) = 2 \iff$  indépendance totale
- ▶ C'est donc une mesure de l'évolution de la dépendance dans l'espace

**Smith**       $\theta(x_2 - x_1) = 2\Phi \left( \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^T \Sigma^{-1} (x_1 - x_2)}}{2} \right)$

**Schlather**     $\theta(\|x_1 - x_2\|) = 1 + \sqrt{\frac{1 - \rho(\|x_1 - x_2\|)}{2}}$

---

<sup>2</sup>sans perte de généralité

## Contour du coefficient extrême

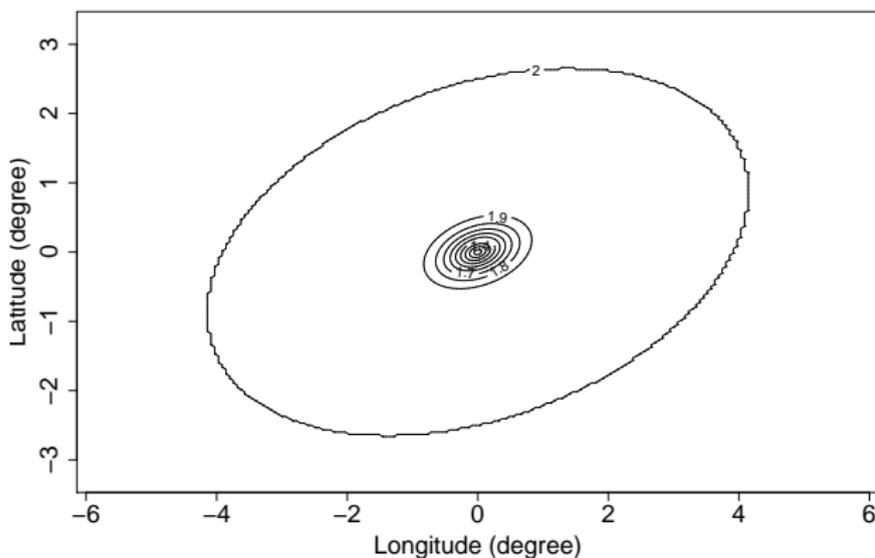


FIG.: Evolution de  $\theta(x_2 - x_1)$  dans l'espace (lon, lat) (degré)

- ▶ Connaissance du degré de dépendance dans l'espace
- ▶ Connaissane de « l'axe focal » des événements extrêmes

# Références



Chandler, R. E. and Bate, S. (2007).

Inference for clustered data using the independence loglikelihood.

*Biometrika*, 94(1) :167–183.



Lindsay, B. (1988).

*Composite likelihood methods*.

Statistical Inference from Stochastic Processes. American Mathematical Society, Providence.



Schlather, M. (2002).

Models for stationary max-stable random fields.

*Extremes*, 5(1) :33–44.



Smith, R. (1991).

Max-stable processes and spatial extreme.

*Unpublished manuscript*.



Varin, C. and Vidoni, P. (2005).

A note on composite likelihood inference and model selection.

*Biometrika*, 92(3) :519–528.