Modèle de Potts avec champ externe et algorithme de type EM pour la segmentation d'image

G. Celeux[1] F. Forbes[1] N.Peyrard[2]

[1] INRIA Rhône-Alpes
[2] INRA Avignon

Unité de Biométrie - Domaine Saint Paul, Site Agroparc - 84914 Avignon cedex 9
nathalie.peyrard@avignon.inra.fr

Résumé

La segmentation markovienne d'image demande de savoir estimer les paramètres d'un modèle de champ de Markov caché, problème pour lequel l'algorithme EM est largement utilisé. En pratique, on choisit souvent pour prendre en compte la dépendance entre pixels un modèle relativement simple : le modèle de Potts homogène isotropique (dit sans champ externe). Il présente l'avantage de n'impliquer qu'un seul paramètre d'interaction et conduit souvent à de bons résultats. Cependant, l'absence de champ externe suppose que toutes les couleurs dans l'image segmentée sont équiprobables. Nous étudions ici, d'un point de vue expérimental, l'influence de l'ajout de paramètres correspondant à un champ externe dans le modèle. Ces paramètres vont jouer un rôle similaire à celui des poids dans un modèle de mélange indépendant et devraient autoriser plus de flexibilité quand aux segmentations. Pour dépasser la difficulté de mise en oeuvre de l'algorithme EM dans le cas des modèles markoviens, à structure complexe, nous utilisons un algorithme de type EM dérivé du principe d'approximation en champ moyen.

Mots Clef

Segmentation d'image, modèle de Potts, estimation du champ externe, algorithme EM, approximation de type champ moyen.

Abstract

Image segmentation using Markov random fields involves parameter estimation in hidden Markov models for which the EM algorithm is widely used. In practice, a simple Markov model is often used to account for the spatial dependencies between pixels, namely the isotropic homogeneous Potts model with no external field. It has the advantage to involve only one interaction parameter and leads in a lot of cases to good results. The absence of an external field parameter implies that all colors have the same weight. In this paper, we investigate, from an experimental point of view, the use of additional parameters (external field) that would play the role of the weight terms in independent mixture models and would allow more flexibility for the segmentations. To deal with the difficulties that arise due to the dependence structure in the models, we use a EM-like algorithm based on the mean field approximation principle.

Keywords

Image segmentation, Potts model, External field estimation, EM algorithm, Mean field approximation.

1 Introduction

La formalisation des problèmes en analyse d'image conduit souvent à des situations avec données incomplètes, pour lesquelles une partie des données est manquante ou n'est pas observée. C'est ainsi le cas par exemple lorsque l'objectif est de retrouver une image (données cachées) à partir d'une version bruitée ou dégradée de cette image (données observées). Plus généralement, les observations peuvent être des mesures uni ou multidimensionnelles relevées en chaque pixel et l'image que l'on cherche à retrouver est un ensemble d'étiquettes, l'étiquette d'un pixel codant son appartenance à une classe et devant être estimée à partir des observations. Il s'agit dans ce cas d'un problème de segmentation d'image. Un modèle probabiliste simple pour traiter ce problème est le modèle de mélange indépendant. Cependant, un tel modèle fait l'hypothèse que chaque observation est indépendante des observations sur les autres pixels et de même pour les étiquettes. Dans le cas des images, cette hypothèse n'est pas raisonnable et un modèle plus adapté est le modèle de champ de Markov caché, qui permet de prendre en compte les dépendances spatiales. C'est le modèle que nous considérons ici. Notons S l'ensemble des pixels, associé à un système de voisinage, et $N(i)$ l'ensemble des pixels voisins du pixel i, pour $i \in S$ (les choix les plus classiques sont les 4 ou les 8 plus proches pixels). Si on représente les données cachées par le champ de variables aléatoires $\mathbf{Z} = \{Z_i, \in S\}$, alors chaque variable Z_i est à valeur dans l'ensemble fini $E = \{e_1, \ldots, e_K\}$ où K est le nombre de classes dans l'image segmentée et où e_k est le vecteur de dimention K dont la $k^{\text{ième}}$ composante vaut 1 et les autres 0. Dans un modèle de Markov caché, un modèle souvent choisi pour représenter $\mathbf{Z}$ est le modèle de Potts à K classes (ou K couleurs). La version la plus simple de ce modèle est le modèle de Potts homogène et isotrope sans champ externe, qui est décrit par un seul paramètre β qui traduit la force des interactions entre pixels. La distribution de probabilité de ce modèle est, pour une réalisation $\mathbf{z}$ de $\mathbf{Z}$:

$$P_G(\mathbf{z}|\beta) = W(\beta)^{-1} e^{\beta \sum\limits_{j\sim i} z_i^t z_j} \tag{1}$$

où $W(\beta)$ est la constante de normalisation et $\sum_{j\sim i}$ désigne la somme sur toutes les paires de pixels voisins. En pratique, on constante que le paramètre β joue assez bien son rôle et l'utilisation du modèle (1) conduit à des segmentations raisonnables dans de nombreux cas ([3], [9], [4], [11], [12], [8], [2], [5]). Cependant, cette version simple du modèle de Potts implique les K classes ont la même probabilité $\frac{1}{K}$ d'apparaître, ce qui peut être contraignant dans le cas de segmentation avec des classes en proportions très différentes. A l'inverse, le modèle de mélange indépendant ($P(\mathbf{z}) = \prod_{i\in S} P_i(z_i)$ et $P_i(z_i)$ inépendant de i) autorise des classes non équiprobables, mais ne prend pas en compte les dépendances spatiales. Une généralisation naturelle du modèle (1) et qui permet de lever la contrainte est le modèle de Potts avec champ externe qui est décrit avec un paramètre K-dimensionnel supplémentaire $\mathbf{V} = (v_1, \ldots, v_K)^t$,

$$P_G(\mathbf{z}|\beta, \mathbf{V}) = W(\beta, \mathbf{V})^{-1} e^{\sum\limits_{i\in S} z_i^t \mathbf{V} + \beta \sum\limits_{j\sim i} z_i^t z_j} \tag{2}$$

Le vecteur $\mathbf{V}$ permet de pondérer les proportions des classes dans l'image segmentée. Il est souvent appelé champ externe. Pour $\beta = 0$, on retrouve le modèle de mélange indépendant. Le modèle (2) est plus souple, par contre son utilisation implique l'estimation de paramètres supplémentaires. Ainsi, ce modèle est rarement choisi en segmentation d'image sans qu'une réelle mise en comparaison des deux modèles n'existe. L'objectif de cet article est donc d'étudier s'il existe un gain à utiliser le modèle de Potts avec champ externe, en terme de qualité de la segmentation et ce dans le cas d'images présentant des classes en proportions très différentes.

Cela demande de savoir estimer les paramètres des deux modèles, simple et avec champ externe. Dans le cas de problèmes avec données cachées, l'algorithme EM est un algorithme classique d'estimation. Il est largement utilisé notamment pour la classification basée sur les modèles de mélanges indépendants. Pour ces modèles, la mise en œuvre de EM est simple du fait de l'hypothèse d'indépendance (*cf.* [10]). Par contre, dans le cas des modèles de champs de Markov cachés des approximations sont nécessaires du fait de la complexité des modèles. Nous utilisons pour cela une méthode d'approximation dérivée de l'approximation en champ moyen qui conduit à un algorithme d'estimation aussi simple à mettre en œuvre que pour les modèles de mélanges indépendants tout en préservant l'information spatiale ([5]).

Dans la partie 2 les modèles paramétriques utilisés pour représenter les données observées et les données cachées sont spécifiés. Dans la partie 3, nous décrivons l'algorithme d'estimation des paramètres dans le cas du modèle de Potts afin de mettre en évident la complexité supplémentaire due à l'ajout du champ externe. Les comportements des deux modèles sont comparés sur des images synthétiques et réelles dans la partie 4. Enfin, une conclusion termine l'article (partie 5).

2 Champ de Markov caché

En segmentation d'image, deux types de données entrent en jeu : les données observées et les données manquantes (ou cachées) à retrouver. Dans cet article, les données manquantes (l'image segmentée) sont représentées par un modèle de Potts à K couleurs (ou classes) défini par la distribution (2). Lorsque le vecteur de paramètres $\mathbf{V}$ est nul (modèle alors défini par la distribution (1)) aucune couleur n'est favorisée par le modèle : si aucune information n'est disponible sur la valeur du champ dans le voisinage de site i alors le site i peut se voir attribué chacune des K couleurs avec la même probabilité. Par contre les probabilités conditionnelles, sachant le voisinage, sont différentes. Inversement, si dans le modèle (2) le paramètre β est nul, il n'y a pas d'interaction entre les pixels et les variables Z_i sont indépendantes. Dans ce dernier cas, pour tout i dans S et pour tout k dans $\{1, \ldots, K\}$,

$$P_G(Z_i = e_k) \;=\; \frac{\exp(v_k)}{\sum\limits_{l=1}^{K} \exp(v_l)},$$

de sorte que les couleurs ne sont pas équiprobables. Le vecteur $\mathbf{V} = (v_1, \ldots, v_K)$ joue donc directement sur la proportion des couleurs dans l'image Z. Notons ici que $\mathbf{V}$ est défini à une constante près, puisque le vecteur $\mathbf{V}' = (v_1 + c, \ldots, v_K + c)^t$ conduit au même modèle de Potts. L'unicité des paramètre peut être assurée en imposant une contrainte du type $\sum_{k=1}^{K} \exp(v_k) = 1$.
Dans un modèle de champ de Markov caché, les données observées $\mathbf{Y} = \{Y_i,\ i \in S\}$ sont supposées indépendantes conditionnellement à la connaissance de $\mathbf{Z}$, la densité conditionnelle f étant de la forme suivante, pour une réalisation $\mathbf{y}$ de $\mathbf{Y}$:

$$f(\mathbf{y} \mid \mathbf{z},\ \theta) \;=\; \prod_{i \in S} f(y_i \mid z_i,\ \theta)$$

où θ est un paramètre et on suppose que les $f(y_i \mid z_i,\ \theta)$ sont non nulles. Ce modèle présente des similarités avec le modèle de mélange indépendant (*cf.* [10]) : un modèle de mélange indépendant peut être vu comme un modèle de champ de Markov caché où les variables Z_i sont indépendantes et identiquement distribuées.
Les densités conditionnelles $f(y_i \mid z_i,\ \theta)$ sont souvent supposées gaussiennes, de sorte que si $z_i = e_k$ alors $f(y_i \mid e_k,\ \theta)$ est la densité d'une loi gaussienne de paramètres μ_k et σ_k. Ces deux paramètres sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la loi dans le cas réel et le vecteur moyenne et la matrice de covariance dans le cas multidimentionnel. Le vecteur des paramètres d'un modèle de champ de Markov caché est donc $\Psi = (\beta, \mathbf{V}, \theta)$ avec $\theta = \{(\mu_k, \sigma_k), k = 1, \ldots, K\}$.
L'objectif en segmentation d'image est de retrouver l'image $\mathbf{z}$, interprétée comme une classification en K classes des pixels de l'image, et cela à partir des données observées $\mathbf{y}$. Cela nécessite de connaitre Ψ, qui en général n'est pas disponible. Il est donc estimé et une méthode classique est l'algorithme EM décrit dans la section suivante.

3 Estimation des paramètres à partir de l'algorithme EM

Si le paramètre Ψ n'est pas connu, un estimateur possible est l'estimateur du maximum de vraisemblance, qui consiste à maximiser la log-vraisemblance du modèle :

$$\begin{aligned} L(\Psi) &= \log P_G(\mathbf{y} \mid \Psi) \\ &= \log \sum_{\mathbf{z}} P_G(\mathbf{y}, \mathbf{z} \mid \Psi). \end{aligned}$$

Dans un contexte avec données manquantes, l'algorithme EM [7] est un algorithme itératif qui vise à maximiser cette log-vraisemblance en maximisant à chaque itération la quantité suivante par rapport à Ψ :

$$Q(\Psi|\Psi^{(q)}) \;=\; I\!E_{\Psi^{(q)}}[\log P_G(\mathbf{y}, \mathbf{Z} \mid \Psi) \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}]\ ,$$

qui est l'espérance de la vraisemblance des données complètes $(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, conditionnellement aux données observées $\mathbf{y}$ et à la valeur courante du paramètre $\Psi^{(q)}$. D'après la propriété de Bayes, Q se réécrit :

$$\begin{aligned} Q(\Psi|\Psi^{(q)}) &= I\!E_{\Psi^{(q)}}[\log P_G(\mathbf{y} \mid \mathbf{Z}, \theta) \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}] \\ &+ I\!E_{\Psi^{(q)}}[\log P_G(\mathbf{Z} \mid \beta, \mathbf{V}) \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}]. \end{aligned}$$

Dans le membre de droite de cette égalité, le premier terme ne dépend pas de β et $\mathbf{V}$ alors que θ n'intervient pas dans le second terme. Nous noterons donc

$$Q(\theta|\Psi^{(q)}) = I\!E_{\Psi^{(q)}}[\log P_G(\mathbf{y} \mid \mathbf{Z}, \theta) \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}] \quad (3)$$

Soit encore

$$Q(\theta|\Psi^{(q)}) = \sum_{i \in S} \sum_{z_i} P_G(z_i|\mathbf{y}, \Psi^{(q)}) \log f(y_i|z_i, \theta)$$

Et

$$Q(\beta,\mathbf{V}|\Psi^{(q)}) = I\!E_{\Psi^{(q)}}[\log P_G(\mathbf{Z} \mid \beta,\mathbf{V}) \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}] \quad (4)$$

Soit si on développe

$$Q(\beta,\mathbf{V}|\Psi^{(q)}) = -\log W(\beta,\mathbf{V})$$
$$-\sum_{i\in S}\sum_{\mathbf{z}_{i\cup N(i)}} z_i^t(\mathbf{V} + \frac{1}{2}\beta\sum_{j\in N(i)} z_j) P_G(\mathbf{z}_{i\cup N(i)}|\mathbf{y},\Psi^{(q)})$$

où pour tout sous-ensemble A de S, la notation $\mathbf{z}_A$ désigne l'ensemble $\{z_i, i \in A\}$. La mise en œuvre directe de EM dans le cas des champs de Markov cachés n'est pas possible pour deux raisons : la constante de normalisation $W(\beta,\mathbf{V})$ ainsi que les probabilités conditionnelles $P_G(z_i \mid \mathbf{y},\Psi^{(q)})$ et $P_G(\mathbf{z}_{i\cup N(i)} \mid \mathbf{y},\Psi^{(q)})$ ne peuvent pas être calculées directement et des approximations sont nécessaires. Nous utilisons ici une méthode d'approximation dite *en champ simulé* (voir [5]) qui est dérivée de l'approximation *en champ moyen* d'un champ de Markov ([6]). Le principe de l'approximation *en champ simulé* consiste à se ramener à un système de variables aléatoires indépendantes en fixant la valeur du champ dans le voisinage de chaque pixel à une constante, qui est simulée selon la loi a posteriori de $\mathbf{Z}$. Plus précisement cela conduit à l'algorithme d'estimation qui consiste à itérer les deux pas suivants :

(P1) Simulation, à partir des observations $\mathbf{y}$ et de la valeur courante des paramètres $\Psi^{(q-1)}$, d'une configuration $\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}$ selon la loi $P_G(\mathbf{z} \mid \mathbf{y},\Psi^{(q-1)})$ (par échantillonneur de Gibbs). Approximation de la distribution marginale $P_G(\mathbf{z}|\beta,\mathbf{V})$ par

$$P_{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}}(\mathbf{z}|\beta,\mathbf{V}) = \prod_{i\in S} P_G(z_i \mid \tilde{\mathbf{z}}^{(q)}_{N(i)},\beta,\mathbf{V}). \quad (5)$$

(P2) Application de EM pour le modèle défini par (3) et (5), avec pour valeurs initiales $\theta^{(q-1)}$, $\beta^{(q-1)}$ et $\mathbf{V}^{(q-1)}$, pour mettre à jour les estimations $\theta^{(q)}$, $\beta^{(q)}$ et $\mathbf{V}^{(q)}$. La distribution jointe $P_G(\mathbf{y},\mathbf{z} \mid \Psi)$ est ainsi remplacée par

$$P_{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}}(\mathbf{y},\mathbf{z}|\Psi) = \prod_{i\in S}\{f(y_i|z_i,\theta)\ P_G(z_i|\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}_{N(i)},\beta)\} \quad (6)$$

L'introduction du pas **(P1)** à chaque itération permet de contourner les difficultés calculatoires rencontrées avec la distribution jointe exacte, du fait de la propriété de factorisation de la distribution (5). En effet, d'une part la constante de normalisation du modèle $P_{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}}(\mathbf{z} \mid \beta,\mathbf{V})$ se calcule directement, et d'autre part à l'intérieur du pas **(P2)**, l'étape E de EM se réduit au calcul, dans (3) et (4), des probabilités conditionnelles correspondant à l'approximation de $P_G(\mathbf{z} \mid \mathbf{y},\Psi^{(q)})$. Cette approximation découle de l'approximation (5) de $P_G(\mathbf{z} \mid \beta)$:

$$P_{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}}(\mathbf{z}|\mathbf{y},\Psi^{(q)}) = \frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{z},\theta^{(q)})P_{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}}(\mathbf{z}|\beta^{(q)},\mathbf{V}^{(q)})}{P_{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}}(\mathbf{y}|\Psi^{(q)})}$$

qui se simplifie grâce à (3) et (5),

$$\begin{aligned} &P_{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}}(\mathbf{z}|\mathbf{y},\Psi^{(q)}) \\ &= \prod_{i\in S}\{\frac{f(y_i|z_i,\theta^{(q)})P_G(z_i|\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}_{N(i)},\beta^{(q)},\mathbf{V}^{(q)})}{\sum_{z_i} f(y_i|z_i,\theta^{(q)})P_G(z_i|\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}_{N(i)},\beta^{(q)},\mathbf{V}^{(q)})}\} \\ &= \prod_{i\in S} P_G(z_i|y_i,\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}_{N(i)},\Psi^{(q)}) \\ &= \prod_{i\in S} P_{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}}(z_i|y_i,\Psi^{(q)}). \end{aligned}$$

On en déduit les approximations suivantes de $Q(\theta|\Psi^{(q)})$ et de $Q(\beta,\mathbf{V}|\Psi^{(q)})$, puisque les Z_i sont indépendantes entre elles,

$$Q(\theta|\Psi^{(q)}) \approx \sum_{i\in S}\sum_{z_i} P_{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}}(z_i|y_i,\Psi^{(q)})\ \log f(y_i|z_i,\theta), \quad (7)$$

et

$$\begin{aligned} &Q(\beta,\mathbf{V}|\Psi^{(q)}) \quad (8) \\ &\approx \sum_{i\in S}\sum_{z_i} \quad P_{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}}(z_i|y_i,\Psi^{(q)}) \quad \log P_{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}}(z_i|\beta,\mathbf{V}). \end{aligned}$$

Ensuite, l'étape M se résout dans difficulté. En effet, dans le cas où les densités conditionnelles $f(y_i|e_k,\theta)$ sont gaussiennes, une expression explicite de $\theta^{(q+1)}$ est disponible. La maximisation de (8) peut se faire par recherche de la valeur qui annule son gradient. Si $q_k^{(q)}(\beta,\mathbf{V})$ et $p_k^{(q)}(\Psi)$ représentent respectivement

$$\begin{aligned} q_k^{(q)}(\beta,\mathbf{V}) &= P_G(Z_i = e_k \mid \mathbf{Z}_{N(i)} = \tilde{\mathbf{z}}^{(q)}_{N(i)},\beta,\mathbf{V}) \\ &= \frac{\exp(e_k^t\mathbf{V} + \beta e_k^t \sum_{j\in N(i)} \tilde{\mathbf{z}}_i^{(q)})}{\sum_{l=1}^{K}\exp(e_l^t\mathbf{V} + \beta e_l^t\sum_{j\in N(i)}\tilde{\mathbf{z}}_i^{(q)})} \end{aligned}$$

et

$$p_k^{(q)}(\Psi) = f(y_i \mid e_k,\theta)\ q_k^{(q)}(\beta,\mathbf{V}).$$

alors il s'agit de trouver β et $\mathbf{V}$ satisfaisant

$$\forall k = 1 \dots K, \quad \sum_{i \in S} q_k^{(q)}(\beta, \mathbf{V}) - p_k^{(q)}(\Psi^{(q)}) = 0$$

et

$$\sum_{i \in S} \sum_{k=1}^{K} e_k^t \sum_{j \in N(i)} \tilde{z}_j^{(q)} (q_k^{(q)}(\beta, \mathbf{V}) - p_k^{(q)}(\Psi^{(q)})) = 0.$$

Par rapport au modèle de Potts simple (modèle (1)), l'utilisation du modèle (2) et l'introduction du paramètre $\mathbf{V}$ demande de résoudre en plus la première équation. Si sa résolution ne présente pas de difficulté, néanmoins on passe d'un problème à une dimension à un problème à K dimensions.

4 Résultats expérimentaux

Du fait du nombre de paramètres supplémentaires, et du coût correspondant, le modèle de Potts avec champ externe est rarement utilisé en segmentation d'image. Cependant, la flexibilité supplémentaire, en terme d'information captée sur l'image, du modèle de Potts complet (2) peut être intéressante puisqu'elle permet de supposer des couleurs a priori non équiprobables. Nous avons réalisé plusieurs expériences de segmentation afin de comparer les performances du modèle complet (2) et du modèle sans champ externe (1). Nous avons ainsi mis en œuvre les algorithmes d'estimation/restauration selon le modèle de Potts utilisé (avec dans tous les cas le choix d'un système de voisinage du second ordre, c'est-à-dire les huit plus proches voisins). Les algorithmes d'estimation ont été initialiés avec la même classification : celle fournie par l'algorithme EM pour un modèle de mélange indépendant. A partir de ces estimations des paramètres du modèle, une restauration est obtenue selon le principe du Maximum a Posteriori appliqué à une approximation en champ simulé du modèle de Potts.

Les premières images traitées sont des images synthétiques bruitées : les images dégradées ont été obtenues par ajout d'un bruit gaussien, de moyenne nulle et de variance σ^2, aux images d'origine en K couleurs. Pour une image, les couleurs ont été dégradées en utilisant la même variance pour toutes les couleurs. Nous avons considéré des images d'origine présentant des classes (ou couleurs) avec des différences de proportions plus ou moins marquées. Les figures 1 (a) et 2 (a) sont ainsi des images synthétiques qui présentent chacune d'une classe en faible proportion (moins de 10 %) alors que dans l'image de la figure 3 (a) les proportions des couleurs sont toutes supérieures à 20 % et que pour l'image de la figure 4 (a) les proportions des couleurs sont pratiquement égales (voir table 2). Les restaurations obtenues avec le modèle de Potts simple (1) et le modèle de Potts avec champ externe (2) sont présentées sur les figures 1 à 4 (c) et (d) respectivement. Les estimations correspondantes des paramètres de bruit sont données dans la table 1. Les taux d'erreur globaux (proportions de pixels mal classés) et les taux d'erreur par classe (proportion de pixels mal classés dans une classe donnée) sont reportés dans la table 2. Ces résultats montrent qu'il y a bien un intérêt à utiliser le modèle de Potts complet pour des images avec des proportions des couleurs très différentes et en particulier lorsque l'une des proportions est petite (voir figures 1 et 2). Les algorithmes d'estimation ont été arrétés après 500 itérations mais nous avons remarqué qu'avec un plus grand nombre d'itérations le choix du modèle complet conduisait à de meilleurs résultats alors que le choix du modèle simple conduisait finalement à une dégradation des estimations et à la disparition de la classe de plus petite proportion. Ainsi, en présence d'une classe en petite proportion, il apparait que l'utilisation du modèle complet mène à une meilleure estimation des paramètres et donc à une restauration plus satisfaisante. Par contre, dans le cas de l'image du damier en trois couleurs, avec des proportions quasiment égales, les deux modèles conduisent à des résultats équivalents. Notons également que même si la qualité des restaurations peut parfois paraître similaire pour les deux modèles en terme d'erreur globale, on constate qu'avec le modèle complet la classe minoritaire est mieux restaurée, pour un taux d'erreur équivalent dans la classe majoritaire (cf. table 2 images Ji et Kin).

Les performances des deux modèles de Potts ont ensuite été comparées sur une image réelle de cellule (figure 5, [1]). On observe sur cet exemple que, bienque l'une des classes dans l'image (le centre de la cellule) soit en proportion faible, on obtient des résultats équivalents. La classification utilisée pour initialiser les algorithmes d'estimation (classification obtenue par EM pour mélanges indépendants, voir figure 5 (b)) est déjà relativement satisfaisante. Par contre, si on initialise les algorithmes avec une classification moins satisfaisante, leur comportement diffère. Ainsi avec une initialisation par simple tri des valeurs des pixels et découpage en 4 classes de tailles égales, la restauration obtenue avec le modèle simple n'est plus satisfaisante alors qu'avec le modèle complet on semble être moins sensible à cette initialisation défavorable (figures 5 (e) et (f)). Cette flexibilité supplémentaire est probable-

Image Ji		
	μ	σ
vraies valeurs	1.00 2.00	0.70 0.70
pas de champ externe	0.82 2.00	0.63 0.69
modèle complet	1.02 2.01	0.71 0.69
Image damier à 4 couleurs		
vraies valeurs	1.00 2.00 3.00 4.00	0.50 0.50 0.50 0.50
pas de champ externe	1.00 1.45 2.21 4.01	0.49 0.00 0.64 0.50
modèle complet	1.00 2.00 2.97 4.01	0.49 0.50 0.48 0.50
Image Kin		
vraies valeurs	1.00 2.00	0.90 0.90 0.90 0.90
pas de champ externe	0.99 2.00	0.89 0.89
modèle complet	1.00 1.99	0.89 0.89
Image damier à 3 couleurs		
vraies valeurs	0.00 1.00 2.00	0.50 0.50 0.50
pas de champ externe	0.00 1.00 2.00	0.50 0.50 0.50
modèle complet	0.00 1.00 2.00	0.50 0.50 0.50

Table 1: Images synthétiques : estimation des paramètres du modèle à partir des images dégradées, selon qu'est utilisé un modèle de Potts simple ou avec champ externe.

Image Ji			
	proportions	err globale	err /couleur
vraies valeurs	5 95	-	-
pas de champ externe	3 97	3	50 0
modèle complet	5 95	3	34 1
Image damier à 4 couleurs			
vraies valeurs	37 34 9 20	-	-
pas de champ externe	37 0 43 20	34	1 100 1 0
modèle complet	38 33 9 20	1	0 1 0 1
Image Kin			
vraies valeurs	21 79	-	-
pas de champ externe	20 80	6	17 3
modèle complet	20 80	5	13 3
Image damier à 3 couleurs			
vraies valeurs	37 34 29	-	-
pas de champ externe	38 33 29	0.6	0 1 0
modèle complet	37 34 29	0.6	1 1 0

Table 2: Images synthétiques : fréquences des différentes classes et taux d'erreur global et par couleurs dans les restaurations selon qu'est utilisé un modèle de Potts simple ou avec champ externe (les résultats sont exprimés en pourcentages).

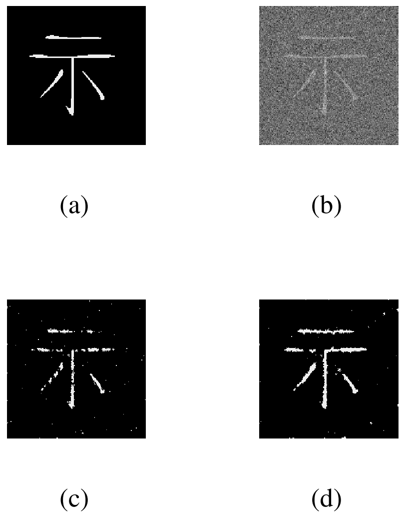

Figure 1: Image Ji : (a) image à 2 couleurs d'origine, (b) image dégradée avec un bruit gaussien ($\sigma = 0.7$), (c) restauration obtenue avec un modèle de Potts sans champ externe, (d) restauration obtenue avec un modèle de Potts avec champ externe.

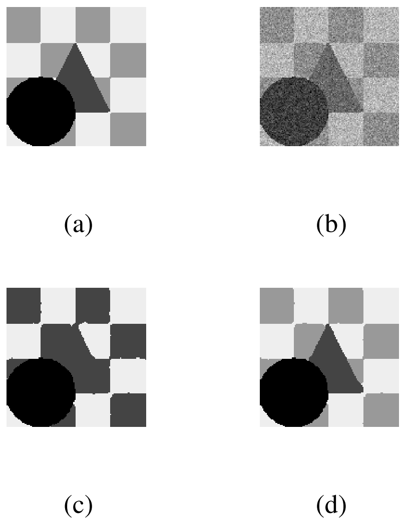

Figure 2: Image damier à 4 couleurs : (a) image d'origine, (b) image dégradée avec un bruit gaussien ($\sigma = 0.5$), (c) restauration obtenue avec un modèle de Potts sans champ externe, (d) restauration obtenue avec un modèle de Potts avec champ externe.

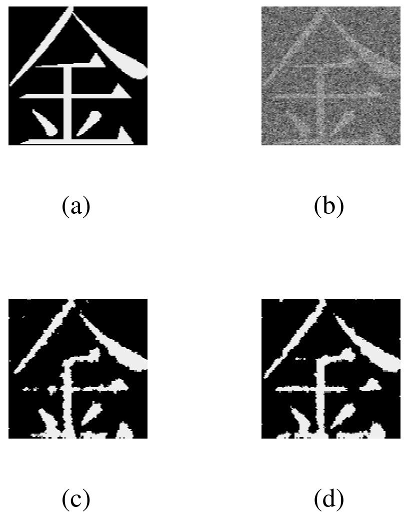

Figure 3: Image Kin : (a) image à 2 couleurs d'origine, (b) image dégradée avec un bruit gaussien ($\sigma = 0.9$), (c) restauration obtenue avec un modèle de Potts sans champ externe, (d) restauration obtenue avec un modèle de Potts avec champ externe.

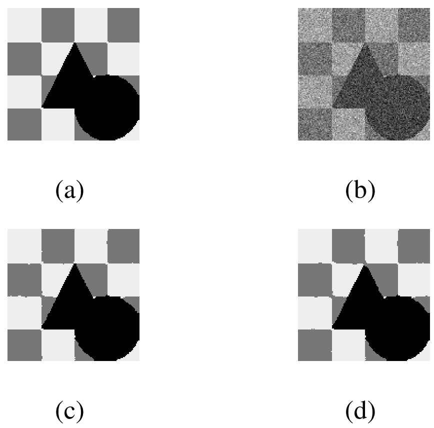

Figure 4: Image damier à 3 couleurs: (a) image d'origine, (b) image dégradée avec un bruit gaussien ($\sigma = 0.5$), (c) restauration obtenue avec un modèle de Potts sans champ externe, (d) restauration obtenue avec un modèle de Potts avec champ externe.

Image cellule	
	proportions
pas de champ externe	5 31 41 23
modèle complet	5 31 41 23
modèle de mélange ind.	4 32 38 26

Table 3: Image cellule : proportions des couleurs dans la restauration (exprimées en pourcentages) selon qu'est utilisé un modèle de Potts simple, un modèle de Potts avec champ externe ou un modèle de mélange indépendant et pour une segmentation en 4 couleurs.

ment due aux paramètres supplémentaires.

5 Conclusion

Le modèle de Potts simple (sans champ externe), bien que conduisant à des résultats satisfaisants dans beaucoup de situations, ne permet cependant pas toujours de bien capturer les caractéristiques de l'image segmentée que l'on cherche à retrouver. Un moyen simple et naturel de généraliser ce modèle est d'utiliser un modèle de Potts avec des potentiels non nuls sur les singletons, ajoutant ainsi un champ externe. En pratique cela alourdit l'étape d'estimation des paramètres du modèle (puisque ceux-ci sont plus nombreux) mais nous avons observé en pratique que d'une part ces modèles sont plus flexibles et sont plus appropriés dans le cas d'images avec des couleurs en proportions très différentes et que d'autres part l'algorithme d'estimation correspondant est moins sensible à une initialisation avec une segmentation de qualité incertaine. La charge de calcul supplémentaire due à l'ajout du champ externe dépend du nombre de classes. Dans les exemples traités on peut observer des temps d'exécutions de 2 à 3 fois supérieurs au temps nécessaire pour le modèle de Potts simple, ce qui reste cependant dans des durées raisonnables.

Remerciementss

Les auteurs souhaitent remercier F. Chouly pour sa participation à la production des résultats expérimentaux présentés.

References

[1] C. Ambroise. *Approche probabiliste en classification automatique et contraintes de voisinage*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, France, 1996.

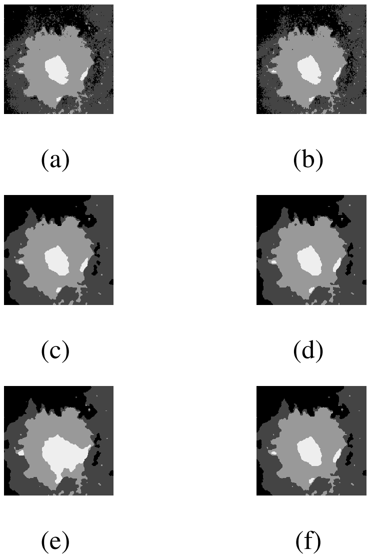

Figure 5: Image cellule : (a) image observée, (b) restauration en 4 couleurs basée sur un modèle de mélange indépendant et une estimation des paramètres par EM, (c) restauration en 4 couleurs basée sur un modèle de Potts sans champ externe et une initialisation de EM par la restauration (b), (d) restauration en 4 couleurs basée sur un modèle de Potts avec champ externe et une initialisation de EM par la restauration (b), (e) restauration en 4 couleurs basée sur un modèle de Potts sans champ externe et une initialisation de EM par une image segmentée en classes d'égales proportions, (f) restauration en 4 couleurs basée sur un modèle de Potts avec champ externe et une initialisation de EM par une image segmentée en classes d'égales proportions.

[2] S.A. Barker and P. J. W. Rayner. Unsupervised image segmentation using markov random field models. *Pattern Recognition*, 33:587–602, 2000.

[3] J. Besag. On the statistical analysis of dirty pictures. *Journal of the Royal Statistical Society, series B*, 48:259–302, 1986.

[4] J. Besag, J. York, and A. Mollié. Bayesian image restoration with two applications in spatial statistics. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 43:1–59, 1991.

[5] G. Celeux, F. Forbes, and N. Peyrard. EM procedures using mean field-like approximations for Markov model-based image segmentation. *To appear in Pattern Recognition*, 2002.

[6] D. Chandler. *Introduction to Modern Statistical Mechanics*. Oxford University Press, 1987.

[7] A. P. Dempster, N. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, series B*, 39:1–38, 1977.

[8] E. Levitan, M. Chan, and G. T. Herman. Image-modelling gibbs prior. *Graphical Models and Image processing*, 57(2):117–130, 1995.

[9] J. Marroquin, S. Mitter, and T. Poggio. Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision. *Journal of the American Statistical Association*, 82(397):76–89, 1987.

[10] G. J. McLachlan and D. Peel. *Finite Mixture Models*. Wiley, 2000.

[11] T. N. Pappas. An adaptive clustering algorithm for image segmentation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(4):901–914, 1992.

[12] J. Zhang. The Mean Field Theory in EM Procedures for Markov Random Fields. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(10):2570–2583, 1992.