Table des matières

Introduction **1**

1 Processus des philosophes sur des graphes échelles **5**
1.1 Réversibilité du processus des philosophes 7
1.2 Graphes échelles 9
1.3 Applications 14
1.4 Hypercubes 20
1.5 Arbres échelles 23

2 Propriétés de Markov des champs aléatoires sur les graphes **27**
2.1 Chaînes et champs de Markov 31
2.2 Propriétés de Markov 34
2.2.1 Propriété de Markov globale **(MG)** 34
2.2.2 Propriété de Markov locale **(ML)** 36
2.2.3 Cas des arbres 37
2.2.4 Systèmes de plus proches voisins **(SPPV)** 39
2.2.5 Systèmes de cliques **(SC)** 40
2.2.6 Mesures de Gibbs de plus proches voisins **(G)** 43
2.2.7 Probabilités non strictement positives 43
2.3 Relations entre les différentes propriétés de Markov 46
2.3.1 Cas général 47
2.3.2 G triangulé 50
2.3.3 G connexe sans cycle (arbre) 55
2.3.4 ν vérifie "w_o" 57

3 Réversibilité et comparaison stochastique pour les systèmes de particules **65**
3.1 Réversibilité des systèmes de particules 66
3.1.1 Caractérisation des mesures réversibles 67
3.1.2 Réversibilité et champs de Markov 74
3.2 Comparaison stochastique et couplage 76
3.2.1 Définitions et résultats de base 77
3.2.2 Conditions locales de comparaison stochastique 79
3.2.3 Couplages markoviens croissants 87

4 Modèles de ressources partagées **93**
4.1 Processus d'utilisateurs et de ressources 94
4.2 Liens avec d'autres modèles 103
4.2.1 Loss Networks 103
4.2.2 Modèles de mécanique statistique 108
4.3 Algorithme de calcul de la fonction de partition de PU définis par troncature 111
4.4 Comparaison stochastique et modèles de ressources partagées 119
4.4.1 Processus d'utilisateurs sur $\mathbb{Z}$ 119
4.4.2 Processus de ressources 122

5 Transition de phase sur les arbres **127**
5.1 Spécifications et mesures de Gibbs 127
5.2 Conditions suffisantes de transition de phase pour le PP sur des arbres échelles 131
5.3 Chaînes de Markov sur les arbres et lois de bord 134
5.4 Application au processus des philosophes sur des arbres échelles 140
5.5 Transition de phase pour des PU sur des arbres 154

Conclusion **159**

Introduction

Nous considérons des systèmes de ressources partagées où un certain nombre d'utilisateurs se partagent des ressources, en général en nombre limité. Divers conflits et blocages peuvent en résulter. Selon les domaines d'applications, différentes façons de modéliser le partage de ressources ont été envisagées. Un des premiers modèles apparus est le "Dining Philosophers Problem" de Dijkstra [16]. A l'origine, cinq philosophes chinois sont assis autour d'une table ronde décorée à leur intention de cinq assiettes de nouilles chinoises. Il n'y a entre chaque assiette qu'une seule baguette et les philosophes ne peuvent déjeuner tous ensemble. Lorsqu'un individu a faim, il saisit les baguettes à sa droite et à sa gauche et empêche par là même ses deux voisins de manger. Les philosophes ainsi privés restent dans leurs profondes pensées. Plus généralement, dans ce modèle les utilisateurs (philosophes) sont représentés par les sommets d'un graphe dont les arêtes sont les ressources (baguettes). Pour travailler (manger) un utilisateur a besoin de toutes les ressources auxquelles il a accès (les arêtes qui lui sont incidentes) et empêche donc ses voisins sur le graphe de travailler en même temps que lui. Dans la pratique, un utilisateur qui ne peut utiliser une ressource n'est pas pour autant complètement bloqué. Pour prendre ceci en compte, Chandy et Misra [7, 8] ont introduit le "Drinking Philosophers Problem" qui généralise le problème de Dijkstra. Un utilisateur peut n'utiliser qu'une partie des ressources auxquelles il a accès de sorte que deux utilisateurs voisins peuvent éventuellement travailler en parallèle s'ils n'occupent pas les mêmes ressources. La seule contrainte est qu'une ressource ne peut être utilisée que par un seul individu à la fois. Ce modèle comme le précédent est un problème déterministe issu de l'informatique. Dans les systèmes distribués la résolution de conflits entre processus est d'une grande importance pratique. Il s'agit principalement de donner des règles de résolution qui permettent d'éviter les situations d'interblocage et de famine tout en assurant l'équité des systèmes. Elles reposent sur le choix d'un critère de sélection du ou des processus en faveur desquels le conflit est réglé. Un système est équitable lorsque ce critère ne favorise pas toujours les mêmes processus. Des méthodes déterministes consistent à hiérarchiser les processus qui s'exécutent. Des priorités leur sont attribuées de manière à assurer le bon fonctionnement de l'algorithme de résolution. Ces méthodes supposent que les processus en conflit sont distinguables. Lorsque ce n'est pas le cas, une alternative est l'emploi d'algorithmes probabilistes où les processus favorisés sont sélectionnés aléatoirement. Pour le "Dining Philosophers Problem", la supériorité d'un tel algorithme sur les algorithmes déterministes est démontrée dans [35]. Une autre manière naturelle d'insérer du hasard dans les modèles de ressources partagées est de considérer que les arrivées des demandes de ressources et les durées d'occupation de ces ressources sont aléatoires. Cela permet notamment de prendre en compte les fluctuations sur ces arrivées et ces durées. Un modèle stochastique du problème de Dijkstra est présenté dans [6]. Les philosophes sont décrits par des chaînes de Markov à 4 états (attente, une baguette, deux baguettes, réflexion). Les matrices de transition dépendent de paramètres liés par des *contraintes* et dont le réglage se fait par minimisation d'une fonction qui traduit le bon fonctionnement du système. D'autres modèles stochastiques de ressources partagées peuvent être envisagés. Les utilisateurs sont vus comme des éléments en interaction dont l'évolution dans le temps est décrite par des processus de Markov à valeurs dans l'ensemble des configurations d'utilisateurs actifs ou inactifs. Il semble que Zenie [59] soit le premier à avoir proposé une telle version markovienne du problème de Dijkstra avec le processus des philosophes (voir aussi [54] et les références qui s'y trouvent). Depuis lors, de nombreux modèles de ce type sont apparus dans le domaine des réseaux de communications. Dans ces modèles, des clients (par exemple des appels téléphoniques) de différents types arrivent et demandent simultanément un certain nombre de ressources (les lignes téléphoniques) de manière exclusive ou non. Un "Loss Network" (voir Kelly [33]) est un processus stochastique qui décrit l'évolution des configurations de lignes (ressources) occupées ou non lorsque les appels arrivent aléatoirement. Le processus des philosophes peut être envisagé comme un cas particulier de Loss Network (voir Suhov [49] et Kelly [32]). Il apparaît également en mécanique statistique comme un cas particulier de modèle de gaz à particules dures (modèle "Hard-Core" décrit par exemple dans [2]). Des particules de taille non négligeable sont centrées sur les sommets d'un graphe. Un sommet a la valeur 1 s'il est occupé par une particule et 0 sinon. Les particules ne peuvent se superposer et deux sommets voisins sur le graphe ne peuvent être simultanément occupés. Dans cette étude nous proposons de nouveaux modèles de ressources partagées qui peuvent être vus comme des versions markoviennes du "Drinking Philosophers Problem". Nous distinguons deux points de vue, celui des utilisateurs et celui des ressources. Nous appelons processus d'utilisateurs (PU) un processus de Markov à valeurs dans un ensemble de configurations. Une configuration associe à chaque utilisateur l'ensemble des ressources qu'il utilise. Un processus de ressources (PR) est un processus de Markov à valeurs dans l'ensemble des sous-ensembles de ressources. L'état d'un tel processus s'interprète comme l'ensemble des ressources occupées à un instant donné. L'objectif d'une telle modélisation est l'évaluation puis l'optimisation des performances des systèmes de ressources partagées considérés. Dans ce travail, nous nous concentrons sur l'évaluation. Les quantités intéressantes sont, par exemple, le taux d'occupation d'un utilisateur, les probabilités que les demandes soient refusées, *etc.* Elles sont en général liées au comportement à l'équilibre des modèles. Dans l'étude de cet équilibre, nous nous sommes naturellement intéressés aux propriétés des champs aléatoires sur les graphes. Il nous est apparu utile de faire le point sur différentes propriétés, à travers l'analyse des nombreuses références du domaine, l'unification de résultats existants et la démonstration de résultats nouveaux. Nous avons donc dans un premier temps considéré des systèmes d'éléments qui interagissent où le temps n'intervient pas. Un paramètre temporel supplémentaire est introduit lorsque nous nous intéressons aux caractéristiques des dynamiques qui conduisent à l'équilibre. Le cadre est alors celui des systèmes de particules tels qu'ils sont introduits dans [36]. Nous nous sommes concentrés sur la notion de réversibilité et sur les techniques de comparaison stochastique et de couplage pour ces systèmes. Nous avons développé un certain nombre d'outils en généralisant et adaptant des outils classiques dont l'utilité apparaît déjà dans l'étude du processus des philosophes. Notre plan sera donc le suivant.

Dans un premier chapitre nous reprenons essentiellement le contenu de [23]. Nous présentons plus précisément le processus des philosophes. Cela constitue une première approche des modèles markoviens de ressources partagées. Le modèle est d'une bonne généralité autant théorique que pratique. Il nous permet d'introduire et d'illustrer des notions importantes telles que la réversibilité, la troncature de processus, l'existence d'un équilibre à forme produit, le calcul de fonctions de partition, les propriétés de Markov sur les graphes. Nous en donnons une utilisation en montrant qu'il est possible de calculer la mesure d'équilibre du processus des philosophes pour une classe de graphes que nous appelons graphes échelles. Cette classe est d'un intérêt pratique car elle contient la plupart des structures classiques rencontrées en informatique et en mécanique statistique. Nous présentons ensuite plus en détail, les notions utiles à l'analyse des modèles de ressources partagées. La mesure d'équilibre du processus des philosophes sur un graphe G est un champ de Markov sur G et son étude s'inscrit dans un contexte plus général. Dans le chapitre 2, basé sur [19], nous étudions des propriétés de Markov des champs aléatoires sur les graphes. Cela repose sur des considérations spatiales où le temps n'intervient pas. Dans le chapitre 3 un paramètre temporel supplémentaire est introduit. Nous y présentons des outils de réversibilité et de comparaison stochastique adaptés aux modèles de ressources partagées (processus d'utilisateurs et de ressources) que nous introduisons dans le chapitre 4. Dans ce chapitre nous précisons aussi les liens avec d'autres classes de modèles existants (Loss Networks et modèles à particules dures) et nous donnons ensuite pour nos modèles quelques exemples d'utilisations des outils du chapitre 3. Pour ce qui est des techniques de comparaison stochastique, nous avons essentiellement repris les contenus de [20] et [21]. Nous considérons enfin le cas de systèmes qui augmentent en taille et en complexité. Ils peuvent être approchés par des systèmes avec un nombre infini d'éléments. Pour de tels systèmes, les questions d'ergodicité abordées dans le chapitre 4 sont poursuivies dans le chapitre 5. Il est important de comprendre comment des interactions locales (par exemple des conflits entre utilisateurs partageant les mêmes ressources) peuvent avoir des effets globaux (par exemple certains utilisateurs favorisés). Nous nous proposons de mettre en évidence de tels effets en étudiant des modèles simples sur des graphes échelles construits à partir d'un arbre infini et pour lesquels nous observons un phénomène de transition de phase. Nous rappelons les notions théoriques utiles à une telle étude et donnons des conditions de transition de phase.

Chapitre 1

Processus des philosophes sur des graphes échelles

Nous abordons la question de la modélisation stochastique des systèmes de ressources partagées en présentant un modèle markovien particulier, le processus des philosophes (PP). Historiquement, c'est un des tous premiers modèles apparus. Il est d'une bonne généralité, autant pratique que théorique. Il apparaît dans des contextes divers (réseaux de communication, mécanique statistique) et illustre l'application d'outils importants que nous développons par la suite pour traiter des modèles plus généraux. Dans ce chapitre, nous reprenons [23] sauf pour les questions de transitions de phase que nous exposons dans le chapitre 5. Le processus des philosophes est un modèle markovien du “Dining Philosophers Problem” de Dijkstra [16]. Les philosophes sont les sommets d'un graphe $G = (S, E)$ non orienté localement fini (chaque sommet est de degré fini). Les arêtes du graphe représentent les dépendances entre philosophes. Pour tout philosophe x dans S nous notons $N(x)$ l'ensemble de ses voisins sur le graphe.

$$N(x) = \{y \in S,\ \{x, y\} \in E\}.$$

Un philosophe est dans l'état 0 s'il pense et dans l'état 1 s'il mange. Une configuration est un application de S dans $\{0, 1\}$. Quand le système est dans la configuration η, l'état du philosophe x est $\eta(x)$ (0 ou 1). Le PP est un processus de Feller $\{\eta_t,\ t \geq 0\}$ sur l'ensemble $X = \{0, 1\}^S$. C'est un cas particulier de systèmes de spin tels qu'ils sont définis dans Liggett [36] . Nous reprenons la terminologie et les notations propres à cette référence. Nous parlerons par exemple de S comme d'un ensemble de sites. Le système évolue dans le temps de la manière suivante. Si la configuration est η dans X alors le philosophe x passe de l'état $\eta(x)$ à l'état $1 - \eta(x)$ avec un taux $c(x, \eta)$ donné par

$$c(x, \eta) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{si } \eta(x) = 1 \\ \lambda & \text{si } \eta(x) = 0 \text{ et } \eta(y) = 0\ \forall y \in N(x) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce qui signifie qu'un philosophe passe de l'état 1 à l'état 0 au bout d'un temps exponentiel de paramètre 1. Il passe de l'état 0 à l'état 1 au bout d'un temps exponentiel de paramètre

λ si aucun des ses voisins n'est déjà en train de manger. Les taux $c(x, \eta)$ ne dépendent donc que de $\eta(x)$ et de la valeur des sommets voisins de x. De tels taux sont qualifiés de taux de plus proches voisins. La nullité de certains d'entre eux réduit l'espace d'états du processus à un sous ensemble $\mathcal{A}_G$ de X, appelé ensemble des configurations admissibles. Ces configurations sont celles pour lesquelles deux philosophes voisins sur G ne sont pas simultanément à 1. Elles correspondent aux sous-ensembles stables du graphe. Un ensemble stable est un sous-ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents. Ils sont encore appelés ensembles indépendants ou cocliques. Ils font l'objet de nombreux développements en théorie des graphes et des liens possibles avec ce domaine sont envisageables (voir [22]).

Le PP a été introduit comme modèle stochastique du problème de Dijkstra par Zenie [59]. Il apparaît également naturellement dans d'autres contextes, notamment comme modèle de réseaux de communication ou modèle de gaz en mécanique statistique. En ce qui concerne le partage de ressources, il peut par exemple servir à modéliser des réseaux d'interconnexions (*cf.* [13]) ou des systèmes de bases de données (*cf.* [56]). Considérons une base de données constituée d'un certain nombre d'objets (les ressources). Un philosophe est assimilé à un type de requête. Chaque type de requête demande un certain nombre d'objets de la base simultanément et de manière exclusive. Les requêtes arrivent selon des processus de Poisson indépendants de paramètre λ. Une requête qui arrive est acceptée si les objets qu'elle demande ne sont pas déjà utilisés. Une requête acceptée occupe ses objets pendant un temps exponentiel de paramètre 1. Une requête non acceptée est perdue. Un graphe d'interactions peut être associé à un tel système. Ses sommets sont les types de requêtes. Deux types de requêtes sont liés par une arête s'ils utilisent au moins un objet commun. Ainsi deux types de requêtes voisins sur le graphe ne peuvent pas s'exécuter en parallèle. Le processus des requêtes en cours dans la base peut être modélisé par un processus des philosophes. Nous renvoyons à [32] et [38] pour plus de détails. Le PP apparaît également comme modèle de routage dans les reseaux de communication. Considérons différents sites connectés par un réseau. Lorsqu'un site désire émettre vers un autre, il fait une demande de routage (type de requête) qui nécessite plusieurs liens (objets) de communication. Cette modélisation peut servir à évaluer les performances du réseau pour différentes stratégies de routage de manière à déterminer la meilleure. Le PP est un cas particulier des “Loss Networks” introduits par Kelly [33]. C'est également un cas particulier de modèle de gaz à particules dures (modèle “Hard-Core”, présenté par exemple dans [2]). Les particules d'un gaz sont de taille non négligeable et leurs centres sont associés aux sommets d'un graphe. La valeur d'un sommet est 1 s'il est occupé par une particule, 0 sinon. Les particules ne peuvent se superposer et deux sommets voisins ne peuvent être simultanément occupés. Dans ce modèle le taux λ dépend en général du sommet (du philosophe) x et est qualifié d'activité a_x. Nous présentons plus en détail ces différents modèles dans le chapitre 4.

Les graphes d'interactions associés aux systèmes étudiés dépendent de leur structure. Certaines sont classiques. En informatique, par exemple, le cycle étudié dans [59] apparaît dans la modélisation de réseaux d'interconnexions appelés tandem. Chaque processeur est relié à deux autres. Il peut communiquer avec l'un ou l'autre d'entre eux mais pas avec les deux simultanément (penser aussi à un réseau téléphonique dans lequel une personne ne peut être en communication qu'avec une autre à la fois). Un autre exemple simple de réseau d'interconnexions est constitué de n processeurs reliés, par l'intermédiaire d'un unique bus, à m mémoires. Le graphe d'interactions associé est le graphe complet (où tous les sommets sont connectés) K_{nm} à nm sommets. Dans un réseau Crossbar, des commutateurs relient n processeurs à m mémoires. Deux processeurs ne peuvent accéder simultanément au même module de mémoire. Le graphe d'interactions est le produit cartésien (voir définition 1.2.1) $K_n \times K_m$. En mécanique statistique, encore, d'autres graphes tels que les grilles sont courants.

Dans ce chapitre, nous présentons plus précisément le PP en tant que modèle de systèmes de ressources partagées. Nous nous intéressons à l'évaluation des performances de ces systèmes à travers des quantités faisant intervenir la mesure d'équilibre du PP. Nous montrons que cette mesure peut être calculée pour une classe de graphes que nous appelons graphes échelles (définition 1.2.2). Cette classe comprend la plupart des structures classiques rencontrées en informatique et en mécanique statistique telles que les grilles, les tores, les hypercubes, *etc.* L'observation essentielle est que la mesure d'équilibre du PP est un champ de Markov qui admet une factorisation sur les cliques du graphe G associé. Dans le cas des graphes échelles cela conduit à un algorithme de calcul de cette mesure faisant principalement intervenir des produits de matrices.

Dans la section 1.1, nous nous intéressons à la notion de réversibilité et à ses conséquences pour le calcul de la mesure stationnaire du PP. Dans la section 1.2, nous définissons les graphes échelles et décrivons dans le cas général notre algorithme de calcul. Nous introduisons quelques notions sur les champs de Markov pour montrer que nos résultats s'insèrent dans un contexte plus général. Ces notions seront développées plus en détail dans le chapitre 2. Dans la section 1.3, nous donnons des résultats explicites concernant les grilles, les tores et les produits par des graphes complets. Dans la section 1.4, nous proposons un calcul récursif de la mesure d'équilibre du PP sur l'hypercube de dimension n. Enfin dans la section 1.5, nous traitons le cas des arbres et de leurs produits cartésiens avec d'autres graphes finis. Nous donnons une équation de récurrence pour la fonction de partition.

1.1 Réversibilité du processus des philosophes

Lorsque le nombre de philosophes est infini, les principales questions sont celles de l'ergodicité du processus et de l'occurence possible d'une transition de phase. Nous abordons ces thèmes dans les chapitres 4 et 5. Ici (sauf précision), nous nous limitons à un nombre fini de philosophes. Dans ce cas, le processus est irréductible sur l'ensemble $\mathcal{A}_G$ des configurations admissibles et admet une unique mesure stationnaire, ν_G. De plus, cette mesure a la propriété d'être réversible et d'admettre une forme produit. Pour justifier cela nous introduisons des définitions et des résultats que nous énoncerons de manière plus large dans la section 3.1 du chapitre 3. Les mesures réversibles sont des mesures invariantes particulières. Elles sont en général beaucoup plus faciles à calculer. Pour les systèmes de spins sur S fini ou non, la proposition 2.7 p. 192 de [36] en donne une caractérisation. Lorsque S est fini, les systèmes de spins considérés sont des processus de Markov à valeurs dans un espace d'états X fini et la caractérisation s'écrit plus simplement. Une mesure ν est réversible si et seulement si (voir par exemple Kelly [31] chap. 1)

$$\forall x \in S,\ \forall \eta \in X, \quad c(x,\eta)\nu(\eta) \;=\; c(x,\eta_x)\nu(\eta_x)\,, \tag{1.1}$$

où η_x est la configuration η changée au site x en $1-\eta(x)$. La nullité de certains taux contraint le PP à rester dans l'ensemble $\mathcal{A}_G$. Il peut être vu comme un système de spins tronqué à $\mathcal{A}_G$.

Définition 1.1.1 *Soit un système de spins de taux $c(x,\eta)$. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble mesurable de X. Le système de spins tronqué à $\mathcal{A}$ est le système de taux $c^{\mathcal{A}}(x,\eta)$ définis par,*

$$c^{\mathcal{A}}(x,\eta) \quad = \quad \begin{cases} 0 & si\ \eta \in \mathcal{A} \ \ et \ \ \eta_x \notin \mathcal{A} \\ c(x,\eta) & sinon. \end{cases}$$

L'intérêt de cette définition vient de la proposition suivante qui indique que la réversibilité est conservée lorsque l'on passe d'un processus réversible à un processus tronqué.

Proposition 1.1.1 *Soit un système de spins de taux $c(x,\eta)$ et ν une mesure réversible pour ce système. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble mesurable de X tel que $\nu(\mathcal{A}) > 0$ et $\nu_{\mathcal{A}}$ la mesure de probabilité définie par*

$$\nu_{\mathcal{A}}(\,.\,) \quad = \quad \nu(\,.\,|\,.\in \mathcal{A}\,)\,.$$

La mesure $\nu_{\mathcal{A}}$ est réversible pour le système tronqué de taux $c^{\mathcal{A}}(x,\eta)$.

Nous appelons ce résultat lemme de troncature. Lorsque S est fini, il découle directement du corollaire 1.10 p. 26 de [31]. Il est encore valable pour le PP sur S infini. En fait, dans le chapitre 3 nous le démontrons dans le cadre plus général des systèmes de particules sur S fini ou non (voir proposition 3.1.3). Ici, il nous permet de montrer que le PP admet une mesure réversible. Le PP est en effet la troncature à $\mathcal{A}_G$ du système de spins de taux

$$c(x,\eta) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{si } \eta(x) = 1 \\ \lambda & \text{si } \eta(x) = 0\,. \end{cases}$$

Ce dernier est clairement réversible. Il correspond à un produit direct de processus de Markov indépendants, identiques, à valeurs dans $\{0,1\}$ et admettant une unique mesure stationnaire $(\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda})$. Or, tout processus de Markov stationnaire à deux états est réversible. Ainsi, lorsque S est fini, le PP admet une unique mesure stationnaire réversible. La proposition 1.1.1 démontre alors la forme produit suivante obtenue pour ν_G.

$$\nu_G(\eta) = \begin{cases} \nu_G(0_G)\ \lambda^{\sum_{x\in S}\eta(x)} & \text{si } \eta \in \mathcal{A}_G \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.2}$$

où 0_G est la configuration où tous les philosophes pensent. La mesure réversible est connue au facteur $\nu_G(0_G)$ près. L'inverse de cette quantité est souvent appelé fonction de partition du système et notée Z_G . C'est un polynôme en λ. Le coefficient d'ordre k est le nombre de configurations admissibles dans lesquelles exactement k philosophes sont à 1 . Elles correspondent aux ensembles stables de G à k sommets. Déterminer ν_G est donc essentiellement un problème combinatoire. La taille de l'espace d'états $\mathcal{A}_G$ interdit cependant une énumération directe même à l'aide d'un ordinateur. Pour les cycles, une expression de la fonction de partition est donnée dans la proposition 2.2 p. 361 dans [54]. Pour $\lambda = 1$, la valeur de la fonction de partition est le cardinal de $\mathcal{A}_G$. A titre d'exemple, pour 100 philosophes autour d'une table ronde (cycle) ce cardinal est

$$792, 070, 839, 848, 372, 253, 127.$$

Dans la section suivante, nous donnons une définition des graphes échelles et décrivons dans le cas général notre algorithme de calcul de la fonction de partition et de diverses autres quantités. Nous précisons le rapport avec les champs de Markov.

1.2 Graphes échelles

Nous définissons une classe de graphes finis pour lesquels le calcul de la mesure réversible du PP peut se réduire à des produits de matrices. Nous présentons les liens entre nos principaux résultats (propositions 1.2.1 et 1.2.2) et des résultats classiques sur les champs et les chaînes de Markov. Dans ce but nous rappelons quelques notations et définitions de théorie des graphes (voir [9] pour une référence générale). Le produit cartésien de deux graphes (parfois encore appelé la somme cartésienne) est défini comme suit ([9] p. 11).

Définition 1.2.1 *Soit $G_1 = (S_1, E_1)$ et $G_2 = (S_2, E_2)$ des graphes non orientés. Le produit cartésien, noté $G_1 \times G_2$ est le graphe $G = (S, E)$ defini par*

$$\begin{aligned}
S &= S_1 \times S_2 \\
E &= \{\ \{(x,y),(x',y')\}\ ;\ (x,y)\ et\ (x',y') \in S_1 \times S_2 \qquad t.q. \\
&\quad\ x = x' \quad et \quad \{y,y'\} \in E_2 \\
&\quad\ ou \\
&\quad\ y = y' \quad et \quad \{x,x'\} \in E_1\ \} \quad .
\end{aligned}$$

Notons C_m le cycle à m sommets et L_m le graphe ligne obtenu en enlevant une arête de C_m.

Définition 1.2.2 *Soit $g = (s, e)$ un graphe fini non orienté. Nous appelons échelle cycle (respectivement échelle ligne) d'échelon g et de longueur m le produit cartésien $g \times C_m$ (respectivement $g \times L_m$).*

Des exemples de graphes échelles sont donnés dans la figure 1.1.

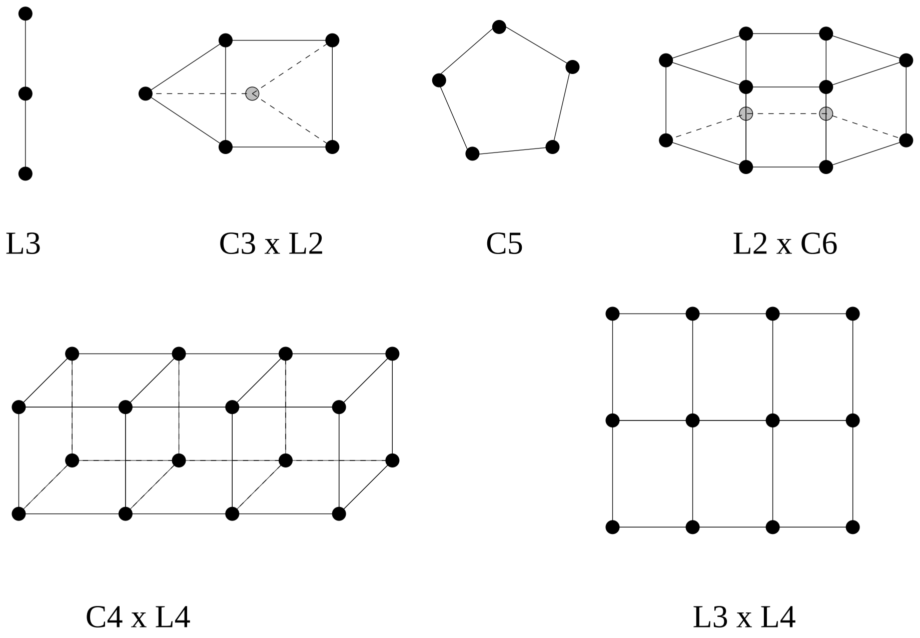


FIG. 1.1: Exemples de graphes échelles.

Si $G = g \times L_m$ ou $g \times C_m$ est un graphe échelle, il est constitué de m échelons (sous-graphes) tous isomorphes à g et connectés les uns aux autres. Nous pouvons les indicer $g_1, \ldots, g_m$. Soit η une configuration sur G. Pour tout $i = 1, \ldots, m$ nous notons η_i sa restriction à g_i. Toute configuration peut alors s'écrire

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \quad .$$

Elle s'interprète comme une configuration sur L_m ou C_m avec comme espace d'états $\{0,1\}^g$. Dans le cas du PP, nous ne considérons que les configurations admissibles et l'espace d'états pour des configurations sur L_m ou C_m est en fait $\mathcal{A}_g$. L'idée est de voir la mesure réversible ν_G du PP sur G comme un champ de Markov (voir définition 1.2.4) sur L_m ou C_m avec espace d'états $\mathcal{A}_g$. Ce champ de Markov peut être interprété comme une chaîne de Markov sur $\mathcal{A}_g$. La matrice de compatibilité que nous définissons ci-dessous est en quelque sorte une version combinatoire de la matrice de transition de cette chaîne.

Définition 1.2.3 *Soit $g = (s, e)$ un graphe fini. Deux configurations γ et δ dans $\mathcal{A}_g$ sont dites compatibles si*

$$\forall x \in s \qquad \gamma(x)\,\delta(x) = 0 \quad .$$

La matrice de compatibilité P_g d'un graphe fini g est la matrice indicée par les éléments de $\mathcal{A}_g$ définie par

$$\forall \gamma, \delta \in \mathcal{A}_g, \qquad P_g(\gamma, \delta) = \begin{cases} \lambda^{\sum_{x \in s} \gamma(x)} & \textit{si } \gamma \textit{ et } \delta \textit{ sont compatibles} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{1.3}$$

Il n'y a pas d'ordre total naturel des éléments de $\mathcal{A}_g$ mais nous pouvons supposer que la première ligne de P_g correspond à la configuration vide notée 0_g. Les éléments de cette ligne sont donc tous égaux à 1, *i.e.* pour tout η dans $\mathcal{A}_g$, $P_g(0_g, \eta) = 1$. Les principaux résultats concernant les échelles lignes et cycles sont donnés dans les deux propositions suivantes. Elles expriment la mesure réversible à l'aide des puissances de la matrice P_g.

Proposition 1.2.1 *Soit $G = g \times L_m$ une échelle ligne. Pour toute configuration $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$*

$$\nu_G((\eta_1, \ldots, \eta_m)) \;=\; {Z_G}^{-1}\, P_g(0_g, \eta_1)\, (\prod_{i=1}^{m-1} P_g(\eta_i, \eta_{i+1})\,)\, P_g(\eta_m, 0_g)\,. \tag{1.4}$$

La fonction de partition est

$$Z_G \;=\; P_g^{m+1}(0_g, 0_g)\,. \tag{1.5}$$

La probabilité que le ième échelon g_i soit à la configuration γ est

$$\nu_G(\,\eta_i = \gamma\,) \;=\; Z_G^{-1}\, P_g^i(0_g, \gamma)\, P_g^{m+1-i}(\gamma, 0_g)\,. \tag{1.6}$$

Proposition 1.2.2 *Soit $G = g \times C_m$ une échelle cycle avec $m > 1$. Pour toute configuration $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$*

$$\nu_G((\eta_1, \ldots, \eta_m)) \;=\; {Z_G}^{-1} \prod_{i=1}^{m} P_g(\eta_i, \eta_{i+1})\;\;, \tag{1.7}$$

avec la convention $m + 1 = 1$. La fonction de partition est

$$Z_G \;=\; trace[P_g^m]\,. \tag{1.8}$$

La probabilité que le i-ème échelon g_i soit à la configuration γ est

$$\nu_G(\,\eta_i = \gamma\,) \;=\; Z_G^{-1}\, P_g^m(\gamma, \gamma)\,. \tag{1.9}$$

Démonstration. Dans les deux propositions, les premières égalités sont des conséquences directes de la définition 1.2.3, de l'équation (1.3) et de la forme produit (1.2). Les expressions de Z_G découlent des égalités précédentes sommées sur l'ensemble des configurations. Les dernières assertions s'obtiennent de façon analogue.

■

La matrice de compatibilité P_g est bien adaptée aux calculs précédents. Il existe cependant d'autres matrices qui vérifient les égalités (1.4) et (1.7). Nous pouvons définir la relation d'équivalence $\mathcal{E}$ suivante entre matrices indicées par $\mathcal{A}_g$.

$$P' \;\mathcal{E}\; P \quad\Leftrightarrow\quad \forall \gamma, \delta \in \mathcal{A}_g,\;\; P'(\gamma, \delta) = P(\gamma, \delta)\, \frac{v(\delta)}{\alpha\; v(\gamma)} \qquad, \tag{1.10}$$

où α est une constante strictement positive et v une fonction strictement positive sur $\mathcal{A}_g$. Il est facile de voir que toute matrice P' vérifiant $P' \;\mathcal{E}\; P_g$ peut se substituer à P_g dans les propositions 1.2.1 et 1.2.2. Il est par exemple possible de remplacer P_g par une matrice symétrique. Un autre choix naturel consiste à remarquer que P_g est une matrice irréductible positive et à appliquer le théorème de Perron-Frobenius. Nous pouvons alors prendre pour α la plus grande valeur propre de P_g et pour v un vecteur propre positif associé, ce qui conduit à

$$\forall \gamma, \delta \in \mathcal{A}_g, \quad P'(\gamma,\delta) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{v(\delta)}{\sum v(\phi)} & \text{si } \gamma \text{ et } \delta \text{ sont compatibles} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La somme au dénominateur porte sur les ϕ compatibles avec γ. La matrice P' est la seule matrice stochastique satisfaisant $P' \; \mathcal{E} \; P_g$. Elle est la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur $\mathcal{A}_g$. Les résultats des propositions 1.2.1 et 1.2.2 seront nos principaux outils pour les applications développées dans les sections suivantes 1.3 et 1.4. Il est intéressant de les replacer dans le contexte plus général des champs de Markov. L'expression champs de Markov peut correspondre à différentes notions (elles font l'objet du chapitre 2). Le terme Markov traduit en général une dépendance locale. On peut par exemple considérer une mesure ν pour laquelle la probabilité qu'un site donné x soit à 1 ne dépend que des valeurs des sites voisins de x (systèmes de plus proches voisins, voir la définition 2.2.5 du chapitre 2). La même propriété de dépendance locale peut également être demandée pour tout sous-ensemble fini de S (et pas seulement pour les singletons $\{x\}$). Ici, nous considérons la définition suivante. Pour V un sous-ensemble fini de S, nous notons $N(V)$ l'ensemble des voisins des éléments de V,

$$N(V) \;=\; \{y \notin V \; t.q. \; \exists x \in V, \; \{x,y\} \in E\} \quad .$$

Si η est un élément de X, nous notons $\eta(V)$ la restriction de η à V. Pour une probabilité ν sur X, $\nu(\eta(V))$ est la probabilité cylindrique de la restriction de ν à V.

Définition 1.2.4 *Une mesure de probabilité ν sur X est un champ de Markov si et seulement si , pour tous sous-ensembles finis U et V de S tels que $V \cup N(V) \subset U$, pour tout η dans X,*

$$\nu(\eta(U)) \;=\; \nu(\eta(U \backslash V)) \quad \nu(\eta(V) \mid \eta(N(V))) \quad . \tag{1.11}$$

Cette définition est équivalente à la définition 2.1.8 du chapitre 2. La notion de champ de Markov est clairement plus forte que celle de système de plus proches voisins. Si ν est positive au sens de la définition 2.1.9, les deux notions sont équivalentes (voir aussi [42] p. 35 et théorème 4.1 p. 27). Il est connu que pour un système de spins avec des taux de plus proches voisins strictement positifs, une mesure réversible est un système de plus proches voisins. Ceci est démontré dans le théorème 2.13 chap. 4 p. 194 de Liggett [36]. On peut également se référer au théorème 9.3 p. 189 dans [31] qui concerne les graphes finis et les systèmes de spins pour lesquels la condition (iii) du théorème est en fait équivalente à l'hypothèse de stricte positivité des taux. Il est facile de vérifier que la démonstration de Liggett de ce résultat est encore valable lorsque les taux de transition ne sont pas forcément strictement positifs mais vérifient la condition plus faible suivante. Pour tout x dans S et tout η dans X,

$$c(x,\eta) + c(x,\eta_x) > 0 \quad . \tag{1.12}$$

Ceci est clairement vérifié par le PP. De plus, les spécifications locales s'écrivent facilement en fonction des taux. Pour tout x dans S et tout η dans X, nous avons

$$\nu(\eta(x) \mid \eta(N(x))) \;=\; \frac{c(x,\eta_x)}{c(x,\eta) + c(x,\eta_x)} \quad . \tag{1.13}$$

Pour le PP, cette expression devient

$$\begin{aligned}
\nu(\eta(x) \mid \eta(N(x))) &= 1 && \text{si } \eta(x)=0 \text{ et } \textstyle\sum_{y\in N(x)} \eta(y) > 0, \\
&= 0 && \text{si } \eta(x)=1 \text{ et } \textstyle\sum_{y\in N(x)} \eta(y) > 0, \\
&= (1+\lambda)^{-1} && \text{si } \eta(x)=0 \text{ et } \textstyle\sum_{y\in N(x)} \eta(y) = 0, \\
&= \lambda(1+\lambda)^{-1} && \text{si } \eta(x)=1 \text{ et } \textstyle\sum_{y\in N(x)} \eta(y) = 0.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Les mesures réversibles pour le PP vérifient en fait une propriété de factorisation plus forte qui correspond à la notion de système de cliques (SC) (voir chapitre 2 définition 2.2.6).

Proposition 1.2.3 *Soit ν_G une mesure réversible pour le PP sur G. Pour tout sous-ensemble fini U de S et tout η dans X,*

$$\nu_G(\eta(U)) \;=\; Z^{-1} Q_0(\eta(N(S\backslash U))) \prod_C Q_C(\eta(C)) \,, \tag{1.15}$$

où le produit porte sur les C non vides qui sont des sous-ensembles complets de U (cliques). Dans cette expression, Q_0 est une fonction de $X_{N(S\backslash U)}$ dans $\mathbb{R}^+$. Les termes Q_C sont des fonctions sur $\{0,1\}^C$ qui peuvent être choisies comme suit.

$$\begin{aligned}
Q_{\{x,y\}}(\eta(\{x,y\})) &= 0 && \textit{si } \{x,y\} \in E \textit{ et } \eta(x)=\eta(y)=1 \,, \\
Q_{\{x\}}(\eta(\{x\})) &= \lambda && \textit{si } x \in S \textit{ et } \eta(x) = 1 \,, \\
Q_C(\eta(C)) &= 1 && \textit{pour tout autre clique } C \textit{ de } G \,.
\end{aligned}$$

Démonstration. Quand G est fini, le terme Q_0 peut être oublié et (1.15) découle clairement de la forme produit (1.2). Pour G infini, il n'est plus possible d'utiliser (1.2) mais la proposition 2.7 p. 192 de [36] permet d'obtenir l'expression analogue (1.16). Si ν_G est réversible pour le PP sur G alors pour tout sous-ensemble fini V de U tel que $V \cup N(V) \subset U$, pour tout η dans X,

$$\nu_G(\eta(U)) \;=\; \begin{cases} \lambda^{\sum_{x\in V} \eta(x)} \, \nu_G(\eta(U\backslash V)0(V)) & \text{si } \; \eta(U) \in \mathcal{A}_U \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1.16}$$

où $\mathcal{A}_U$ est l'ensemble des configurations admissibles pour le sous-graphe engendré par U (définition 2.1.1) et $\eta(U\backslash V)0(V)$ est la configuration qui coïncide avec η sur $U\backslash V$ et avec 0_G sur V. En utilisant (1.16) avec $V = U\backslash N(S\backslash U)$ nous obtenons (1.15) avec $Q_0(\eta(N(S\backslash U))) = \lambda^{-\sum_{x\in N(S\backslash U)} \eta(x)} \nu_G(\eta(U\backslash V)0(V))$.

$\blacksquare$

Un système de cliques est un champ de Markov. Pour des mesures positives, la réciproque est vraie. Ceci peut se déduire par exemple de l'équivalence classique entre champs de Markov positifs et mesures de Gibbs (théorème 4.1 p. 27 de [42]). Dans le cas général, les deux définitions ne coïncident pas (voir la partie 2.3.1 du chapitre 2). Les mesures réversibles pour le PP ne sont pas strictement positives puisque seules les configurations admissibles sont autorisées. Toutefois, il est possible de montrer que l'équivalence est encore vraie sous une condition plus faible qui est satisfaite par le PP. Cette condition a été introduite sous le nom de condition "w_o" par Suomela [50]. Nous nous y intéressons plus précisément dans le chapitre 2 (définition 2.2.9).

1.3 Applications

Les propositions 1.2.1 et 1.2.2 sont surtout intéressantes lorque la matrice de compatibilité P_g n'est pas trop grande et peut être déterminée facilement. Le calcul de ses puissances m-ième pour des grandes valeurs de m est alors bien moins coûteux qu'une énumération directe des configurations admissibles sur $g \times L_m$ ou $g \times C_m$. Dans cette section, nous appliquons les résultats de la section 1.2 dans le cas où l'échelon g est une clique, une ligne ou un cycle.

Soit K_n la clique à n sommets. Pour $g = K_n$, l'ensemble des configurations admissibles $\mathcal{A}_g$ ne contient que $n+1$ éléments, 0_g et les n configurations avec un seul philosophe à 1. En ce qui concerne les calculs, toutes les configurations non vides sont équivalentes. Notons γ l'une quelconque d'entre elles. La probabilité qu'un philosophe sur l'échelon g_i soit à 1 (taux d'occupation) ne dépend pas du philosophe considéré et est donnée par $\nu_G(\ \eta_i = \gamma\ )$. La matrice de compatibilité P_g a également une forme très particulière. Les résultats pour les échelles lignes et cycles sont les suivants.

Proposition 1.3.1 *Soit $G = K_n \times L_m$ une échelle ligne. La fonction de partition de ν_G est*

$$\begin{aligned} Z_G &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,[\ \frac{(1+n\lambda)}{2^m}\,[\ (1+(n-1)\lambda+\sqrt{\Delta})^m - (1+(n-1)\lambda-\sqrt{\Delta})^m\ ] \\ &\quad + \frac{\lambda}{2^{m-1}}\,[\ (1+(n-1)\lambda+\sqrt{\Delta})^{m-1} - (1+(n-1)\lambda-\sqrt{\Delta})^{m-1}\ ]\ ] \end{aligned}$$

$$\textit{avec} \quad \Delta \;=\; 1+2(n+1)\lambda+(n-1)^2\lambda^2\ . \tag{1.17}$$

Soit γ une des configurations non vides de $\mathcal{A}_g$. La probabilité qu'un philosophe sur l'échelon g_i soit à 1 (taux d'occupation) est donnée par

$$\begin{aligned} \nu_G(\ \eta_i = \gamma\ ) &= Z_G^{-1}\ P_g^i(0_g,\gamma)\ P_g^{m+1-i}(\gamma,0_g) \\ &= Z_G^{-1}\ \lambda\ P_g^i(0_g,\gamma)\ P_g^{m+1-i}(0_g,\gamma) \quad . \end{aligned} \tag{1.18}$$

Proposition 1.3.2 *Soit $G = K_n \times C_m$ une échelle cycle avec $m > 1$. La fonction de partition de ν_G est*

$$Z_G \;=\; \frac{(n-1)(-2)^m\lambda^m + [1+(n-1)\lambda+\sqrt{\Delta}]^m + [1+(n-1)\lambda-\sqrt{\Delta}]^m}{2^m}$$

$$avec \quad \Delta \;=\; 1 + 2(n+1)\lambda + (n-1)^2\lambda^2 \;. \tag{1.19}$$

Soit γ une des configurations non vides de $\mathcal{A}_g$. La probabilité qu'un philosophe sur l'échelon g_i soit à 1 (taux d'occupation) est donnée par

$$\nu_G(\ \eta_i = \gamma\ ) \;=\; (n\ Z_{K_n\times C_m})^{-1}\left(Z_{K_n\times C_m} - Z_{K_n\times L_{m-1}}\right) \quad . \tag{1.20}$$

Démonstration. La matrice P_g et ses puissances ont une forme très particulière. Rappelons que le premier indice correspond à 0_g. Nous avons

$$P_g^k \;=\; \begin{pmatrix} a_k & b_k & \dots & \dots & b_k \\ c_k & d_k & e_k & \dots & e_k \\ \vdots & e_k & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & e_k \\ c_k & e_k & \dots & e_k & d_k \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

avec $a_1 = b_1 = 1$, $d_1 = 0$, $c_1 = e_1 = \lambda$. Considérons d'abord les fonctions de partition. Ce sont des polynômes en λ dont les coefficients dépendent du nombre m d'échelons et de l'ordre n de la clique. Ainsi, il nous suffit de calculer $P_g^{k+1}(0_g, 0_g) = a_{k+1}$ dans le cas des lignes et $P_g^k(0_g, 0_g) = a_k$ et $P_g^k(\gamma,\gamma) = d_k$ dans le cas des cycles car $trace[P_g^k] = a_k + nd_k$. Ceci peut se faire par récurrence.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_g^{k+1}(0_g,0_g) \\ P_g^{k+1}(0_g,\gamma) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & n\lambda \\ 1 & (n-1)\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_g^{k}(0_g,0_g) \\ P_g^{k}(0_g,\gamma) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & n\lambda \\ 1 & (n-1)\lambda \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.22}$$

et

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_g^{k+1}(0_g,\gamma) \\ P_g^{k+1}(\gamma,\gamma) \\ P_g^{k+1}(\delta,\gamma) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & (n-1) \\ \lambda & 0 & (n-1)\lambda \\ \lambda & \lambda & (n-2)\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_g^{k}(0_g,\gamma) \\ P_g^{k}(\gamma,\gamma) \\ P_g^{k}(\delta,\gamma) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & (n-1) \\ \lambda & 0 & (n-1)\lambda \\ \lambda & \lambda & (n-2)\lambda \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.23}$$

où γ et δ sont deux configurations de $\mathcal{A}_g$, non vides et distinctes.
Dans le cas des lignes la résolution de (1.22) conduit à (1.17) et dans celui des cycles celle de (1.23) conduit à (1.19). Les expressions $Z_{K_n\times L_m}$ et $Z_{K_n\times C_m}$ sont bien des polynômes en λ car les puissances paires de $\sqrt{\Delta}$ se simplifient au dénominateur de (1.17) et les puissances impaires de $\sqrt{\Delta}$ se simplifient dans (1.19).

La fonction de partition n'est pas la seule quantité intéressante qu'il est possible de calculer explicitement. Les taux d'occupation peuvent également être déterminés en utilisant les expressions (1.6) et (1.9). Quand g est la clique K_n, la probabilité qu'un philosophe de l'échelon g_i soit à 1 est donnée par $\nu_G(\ \eta_i = \gamma\ )$.

Pour les échelles lignes $G = K_n \times L_m$, nous avons

$$\begin{aligned} \nu_G(\ \eta_i = \gamma\ ) &= Z_G{}^{-1}\ P_g^i(0_g, \gamma)\ P_g^{m+1-i}(\gamma, 0_g) \\ &= Z_G{}^{-1}\ \lambda\ P_g^i(0_g, \gamma)\ P_g^{m+1-i}(0_g, \gamma) \quad . \end{aligned}$$

Cette expression est invariante par la transformation $i \to m+1-i$, ce qui est cohérent avec la structure symétrique de L_m. L'expression de $P_g^k(0_g, \gamma)$ est déjà donnée par (1.22).

Pour les échelles cycles $G = K_n \times C_m$,

$$\begin{aligned} \nu_G(\ \eta_i = \gamma\ ) &= Z_G{}^{-1}\ P_g^m(\gamma, \gamma) \\ &= (n\ Z_G)^{-1}\ (trace[P_g^m] - P_g^m(0_g, 0_g)) \\ &= (n\ Z_{K_n \times C_m})^{-1}\ (Z_{K_n \times C_m} - Z_{K_n \times L_{m-1}}) \quad . \end{aligned}$$

∎

Les expressions du tableau 1.1 ont été calculées à l'aide de la formule (1.17). Pour les cas simples, leur validité est vérifiable par énumération directe des configurations admissibles. Pour $n = 1$, les graphes $K_n \times L_m$ sont simplement les lignes L_m. Le tableau 1.2 illustre l'application de la formule (1.19). Certains graphes peuvent être interprétés à la fois comme des échelles lignes et cycles. Par exemple, $K_2 \times C_2 = K_1 \times C_4$ et $K_2 \times C_3 = K_3 \times C_2$ avec $K_2 = C_2 = L_2$. Ainsi, certains résultats du tableau 1.1 sont redondants avec ceux du tableau 1.2. Remplacer m par 2 dans (1.17) et (1.19) conduit bien à la même expression comme attendu. Pour $n = 1$ et m quelconque, l'expression (1.19) se simplifie en la formule donnée dans [54], proposition 2.2 p. 36. L'expression (1.17) admet aussi une écriture plus simple

$$Z_{L_m} = \frac{1}{2^{m+2}\sqrt{\Delta}}\ [\ (1+\sqrt{\Delta})^{m+2} - (1-\sqrt{\Delta})^{m+2}\ ] \tag{1.24}$$

Nous nous intéressons à présent au cas des grilles, des tores et des cylindres. Ces graphes peuvent être interprétés comme des échelles lignes ou cycles en posant $g = L_n$ et $g = C_n$. Pour déterminer leur fonction de partition, il nous faut calculer les matrices de compatibilité P_{L_n} et P_{C_n} pour les lignes et les cycles. Elles peuvent être construites par récurrence comme suit.

Proposition 1.3.3 *Soit k_n la dimension de P_{L_n} (le cardinal de $\mathcal{A}_{L_n}$). Nous avons*

$$k_n = k_{n-1} + k_{n-2} \ .$$

Soit D_n la matrice $k_{n-2} \times k_{n-1}$ constituée des k_{n-2} premières lignes de $P_{L_{n-1}}$ multipliées par le taux λ.

Soit F_n la matrice $k_{n-1} \times k_{n-2}$ constituée des k_{n-2} premières colonnes de $P_{L_{n-1}}$.

Alors,

$n=1$	$m=2$	1	$+2\lambda$			
	$m=3$	1	$+3\lambda$	$+\lambda^2$		
	$m=4$	1	$+4\lambda$	$+3\lambda^2$		
$n=2$	$m=2$	1	$+4\lambda$	$+2\lambda^2$		
	$m=3$	1	$+6\lambda$	$+8\lambda^2$	$+2\lambda^3$	
	$m=4$	1	$+8\lambda$	$+18\lambda^2$	$+12\lambda^3$	$+2\lambda^4$
$n=3$	$m=2$	1	$+6\lambda$	$+6\lambda^2$		
	$m=3$	1	$+9\lambda$	$+21\lambda^2$	$+12\lambda^3$	
	$m=4$	1	$+12\lambda$	$+45\lambda^2$	$+60\lambda^3$	$+24\lambda^4$
$n=4$	$m=2$	1	$+8\lambda$	$+12\lambda^2$		
	$m=3$	1	$+12\lambda$	$+40\lambda^2$	$+36\lambda^3$	
	$m=4$	1	$+16\lambda$	$+84\lambda^2$	$+168\lambda^3$	$+108\lambda^4$

TAB. 1.1: Fonctions de partition pour les échelles lignes $K_n \times L_m$.

$n=1$	$m=2$	1	$+2\lambda$							
	$m=3$	1	$+3\lambda$							
	$m=4$	1	$+4\lambda$	$+2\lambda^2$						
	$m=5$	1	$+5\lambda$	$+5\lambda^2$						
	$m=6$	1	$+6\lambda$	$+9\lambda^2$	$+2\lambda^3$					
$n=2$	$m=2$	1	$+4\lambda$	$+2\lambda^2$						
	$m=3$	1	$+6\lambda$	$+6\lambda^2$						
	$m=4$	1	$+8\lambda$	$+16\lambda^2$	$+8\lambda^3$	$+2\lambda^4$				
	$m=5$	1	$+10\lambda$	$+30\lambda^2$	$+30\lambda^3$	$+10\lambda^4$				
	$m=6$	1	$+12\lambda$	$+48\lambda^2$	$+76\lambda^3$	$+48\lambda^4$	$+12\lambda^5$	$+2\lambda^6$		
	$m=7$	1	$+14\lambda$	$+70\lambda^2$	$+154\lambda^3$	$+154\lambda^4$	$+70\lambda^5$	$+14\lambda^6$		
	$m=9$	1	$+18\lambda$	$+126\lambda^2$	$+438\lambda^3$	$+810\lambda^4$	$+810\lambda^5$	$+438\lambda^6$	$+126\lambda^7$	$+18\lambda^8$
$n=3$	$m=2$	1	$+6\lambda$	$+6\lambda^2$						
	$m=3$	1	$+9\lambda$	$+18\lambda^2$	$+6\lambda^3$					
	$m=4$	1	$+12\lambda$	$+42\lambda^2$	$+48\lambda^3$	$+18\lambda^4$				
	$m=5$	1	$+15\lambda$	$+75\lambda^2$	$+150\lambda^3$	$+120\lambda^4$	$+30\lambda^5$			
$n=4$	$m=2$	1	$+8\lambda$	$+12\lambda^2$						
	$m=3$	1	$+12\lambda$	$+36\lambda^2$	$+24\lambda^3$					
	$m=4$	1	$+16\lambda$	$+80\lambda^2$	$+144\lambda^3$	$+84\lambda^4$				

TAB. 1.2: Fonctions de partition pour les échelles cycles $K_n \times C_m$.

$$P_{L_n} = \left(\begin{array}{c|c} P_{L_{n-1}} & F_n \\ \hline D_n & 0 \end{array} \right) \quad .$$

Cette construction induit un ordre naturel sur les éléments de $\mathcal{A}_{L_n}$ que nous décrirons dans la démonstration.
La construction de P_{C_n} est liée à celle de P_{L_n}.

Proposition 1.3.4 *Soit k_n la dimension de P_{L_n}.*

Soit v_n un vecteur construit par récurrence comme suit. La récurrence démarre à $n = 3$ avec $v_3 = (\ 1\ )$. Pour passer de v_{n-1} à v_n, il faut prendre les nombres dans v_{n-1} qui sont inférieurs ou égaux à k_{n-4} et leur ajouter k_{n-3}. Les valeurs obtenues doivent ensuite être jointes à celles de v_{n-1}.

Soit D'_n la matrice $k_{n-3} \times k_{n-1}$ constituée de k_{n-3} lignes de $P_{L_{n-1}}$ multipliées par λ, dont les indices sont les nombres dans v_n.

Soit F'_n la matrice $k_{n-1} \times k_{n-3}$ constituée de k_{n-3} colonnes de $P_{L_{n-1}}$ dont les indices sont les nombres dans v_n.

Alors,

$$P_{C_n} = \left(\begin{array}{c|c} P_{L_{n-1}} & F'_n \\ \hline D'_n & 0 \end{array} \right) \quad .$$

Démonstration. Nous commençons par examiner les dimensions respectives des matrices P_{L_n} et P_{C_n}. Les fonctions de partition pour L_n et C_n sont Z_{L_n} et Z_{C_n}. Il est facile de vérifier à partir de la forme produit (1.2) (voir aussi l'équation plus générale 4.11 dans le chapitre 4) que

$$\begin{aligned} Z_{L_n} &= Z_{L_{n-1}} + \lambda\ Z_{L_{n-2}} \\ Z_{C_n} &= Z_{L_{n-1}} + \lambda\ Z_{L_{n-3}} \quad . \end{aligned} \tag{1.25}$$

En prenant $\lambda = 1$, il apparaît que le nombre de configurations admissibles sur L_n, noté k_n, est le n-ième terme d'une suite de Fibonacci démarrant à $k_0 = 1$ et $k_1 = 2$. Ce nombre est également la dimension de la matrice P_{L_n}. Le nombre k'_n des configurations admissibles sur C_n (et aussi la dimension de P_{C_n}) est donné par $k'_n = k_{n-1} + k_{n-3}$.

Une configuration sur L_n peut être vue comme une valeur pour un site x_1 et une configuration sur L_{n-1}. Les configurations sur L_n sont ordonnées par récurrence comme suit. Supposons un ordre donné pour les configurations sur L_{n-1}. Les configurations sur L_n pour lesquelles x_1 est à 0 sont placées dans un premier bloc de taille k_{n-1}. Celles pour lesquelles x_1 vaut 1 sont placées dans un second bloc de taille k_{n-2}. A l'intérieur de chaque bloc, l'ordre pour L_{n-1} est respecté. Ainsi P_{L_n} est constituée de quatre blocs,

$$P_{L_n} = \left(\begin{array}{c|c} P_{L_{n-1}} & F_n \\ \hline D_n & 0 \end{array}\right) \quad .$$

La matrice $P_{L_{n-1}}$ a la même structure,

$$P_{L_{n-1}} = \left(\begin{array}{c|c} P_{L_{n-2}} & F_{n-1} \\ \hline D_{n-1} & 0 \end{array}\right)$$

et il est facile de voir que

$$F_n = \left(\begin{array}{c} P_{L_{n-2}} \\ \hline D_{n-1} \end{array}\right) \quad \text{et } D_n = \lambda \left(\begin{array}{c|c} P_{L_{n-2}} & F_{n-1} \end{array}\right) \quad .$$

De sorte que P_{L_n} se déduit de $P_{L_{n-1}}$.

Nous procédons de même pour P_{C_n}.

$$P_{C_n} = \left(\begin{array}{c|c} P_{L_{n-1}} & F'_n \\ \hline D'_n & 0 \end{array}\right) \quad .$$

Un site x_0 de C_n est choisi. Les configurations sur C_n pour lesquelles x_0 vaut 0 sont placées avant celles pour lesquelles x_0 vaut 1. Ainsi le premier bloc de la matrice P_{C_n} est $P_{L_{n-1}}$. Le bloc F'_n est constitué de k_{n-3} colonnes de $P_{L_{n-1}}$ et D'_n de k_{n-3} lignes de $P_{L_{n-1}}$ après multiplication par λ. Déterminons d'abord quelles sont les colonnes de $P_{L_{n-1}}$ qui doivent être utilisées pour construire F'_n. Soit v_n un vecteur contenant les indices de ces colonnes. Il peut être construit récursivement à partir de v_{n-1}. Les colonnes de F'_n (qui ont pour indices dans $P_{L_{n-1}}$ les nombres dans v_n) correspondent aux configurations admissibles sur C_n pour lesquelles $x_0 = 1$. Elles correspondent donc aux configurations sur L_{n-1} pour lesquelles les sites des extrémités x_1 et x_{n-1} valent 0. Les configurations pour lesquelles x_1 vaut 0 sont dans le premier bloc de $P_{L_{n-1}}$ (égal à $P_{L_{n-2}}$). Parmi celles-ci, nous devons déterminer celles pour lesquelles x_{n-1} vaut 0. Mais chaque configuration sur L_{n-1} avec $x_1 = 0$ correspond à une configuration sur L_{n-2} et nous devons donc déterminer les configurations sur L_{n-2} avec $x_{n-2} = 0$. Nous disposons déjà des nombres dans v_{n-1} qui correspondent aux configurations sur L_{n-2} ayant leurs extrémités à 0. Les nombres dans v_{n-1} donnent les premières colonnes de F'_n. Les colonnes restantes sont des configurations sur L_{n-2} avec $x_1 = 1$ et $x_{n-2} = 0$. Elles correspondent au second bloc de la matrice $P_{L_{n-2}}$ et vérifient $x_2 = 0$. Les indices cherchés sont déterminés en ajoutant la quantité k_{n-3} aux nombres dans v_{n-1} qui sont inférieurs ou égaux à k_{n-4}. Il suffit de joindre ces valeurs à celles de v_{n-1} pour obtenir v_n. La récurrence démarre à $n = 3$. Les matrices $P_{C_1} = P_{L_1}$, $P_{C_2} = P_{L_2}$ et $P_{C_3} = P_{K_3}$ sont faciles à calculer et v_3 est pris égal à $(\ 1\ )$. Les premières valeurs de v_n sont données ci-dessous.

$$\begin{array}{llll} v_3 = (\ 1\ ) & & k_0 = 1 & k_1 = 2 \\ v_4 = (\ 1, 1+2\ ) & = (\ 1, 3\ ) & k_1 = 2 & k_2 = 3 \\ v_5 = (\ 1, 3, 1+3\ ) & = (\ 1, 3, 4\ ) & k_2 = 3 & k_3 = 5 \\ v_6 = (\ 1, 3, 4, 1+5, 3+5\ ) & = (\ 1, 3, 4, 6, 8\ ) & k_3 = 5 & k_4 = 8. \end{array} \tag{1.26}$$

■

Pour illustrer ceci, nous avons calculé le nombre de configurations admissibles pour différents graphes. Ce nombre est la valeur de la fonction de partition pour $\lambda = 1$. Les résultats pour des échelles à 100 philosophes sont donnés dans la table 1.3. Le nombre d'arêtes est précisé pour chacun de ces graphes de manière à illustrer l'idée intuitive selon laquelle le nombre de configurations admissibles diminue lorsque le nombre d'arêtes augmente.

Les grilles et les tores en dimension 3 peuvent également être vus comme des graphes échelles. Il suffit pour cela de prendre pour g une grille ou un tore en dimension 2. Pour calculer la fonction de partition il faut alors déterminer la matrice de compatibilité pour les grilles et les tores en dimension 2. Comme pour L_n et C_n (grilles et tores en dimension 1) cette matrice peut être construite par récurrence. Les équations sont analogues à celles de P_{L_n} et P_{C_n}, bien que plus compliquées. Nous ne les détaillons pas.

1.4 Hypercubes

Dans cette section nous considérons les cubes de dimension n (voir [9] p. 12). Nous proposons un calcul récursif de leur matrice de compatibilité en vue du calcul de leur fonction de partition. Notre algorithme est plus rapide qu'une énumération directe des configurations admissibles mais sa complexité reste exponentielle en n. Les cubes Q_n peuvent être construits par récurrence,

$$\begin{aligned} Q_0 &= L_1 \\ Q_n &= Q_{n-1} \times C_2 \qquad (1.27) \\ &= Q_{n-2} \times C_2 \times C_2 \quad = \quad Q_{n-2} \times C_4 \quad . \qquad (1.28) \end{aligned}$$

Ainsi Q_n est un cas particulier d'échelle ligne avec $g = Q_{n-1}$ mais aussi d'échelle cycle avec $g = Q_{n-2}$. Soit P_n la matrice de compatibilité de Q_n. La fonction de partition Z_{Q_n} du PP sur Q_n peut être calculée en utilisant soit (1.27) soit (1.28). Soit 0_n la configuration vide sur Q_n. Nous déduisons des propositions 1.2.1 et 1.2.2,

$$\begin{aligned} Z_{Q_n} &= P^3_{n-1}(0_{n-1}, 0_{n-1}) \\ &= trace[\ P^4_{n-2}\ ] \quad . \end{aligned}$$

graphe	arêtes	nombre de configurations admissibles
$L100$	99	$927,372,692,193,078,999,176$
$C100$	100	$792,070,839,848,372,253,127$
$L2 \times L50$	148	$16,616,132,878,186,749,607$
$L2 \times C50$	150	$13,765,255,184,676,885,127$
$L4 \times L25$	171	$3,706,188,077,591,198,432$
$L4 \times C25$	175	$2,662,270,770,083,033,841$
$C4 \times L25$	196	$849,258,745,421,311,327$
$C4 \times C25$	200	$643,439,082,960,504,561$
$L5 \times L20$	175	$2,840,321,953,949,094,447$
$L5 \times C20$	180	$1,904,270,890,157,965,061$
$C5 \times L20$	195	$635,511,992,964,231,701$
$C5 \times C20$	200	$456,085,875,187,977,011$
$L10 \times L10$	180	$2,030,049,051,145,980,050$
$L10 \times C10$	190	$974,602,314,570,939,359$
$C10 \times C10$	200	$498,819,827,260,367,617$
$K4 \times L25$	246	$5,527,939,700,884,757$
$K4 \times C25$	250	$4,721,424,167,835,361$
$K5 \times L20$	295	$233,528,957,822,051$
$K5 \times C20$	300	$203,080,369,893,131$
$K10 \times L10$	540	$12,010,471,551$
$K10 \times C10$	550	$11,035,502,511$
$L5 \times K20$	1030	$3,393,261$
$C5 \times K20$	1050	$3,240,081$
$K5 \times K20$	1150	$2,514,181$
$L4 \times K25$	1275	$408,176$
$C4 \times K25$	1300	$393,151$
$K4 \times K25$	1350	$362,501$
$L2 \times K50$	2500	$2,551$
$K100$	4950	101

TAB. 1.3: Nombres de configurations admissibles.

Le problème est donc de calculer la matrice P_n. Sa taille augmente très rapidement avec n. Par exemple, P_3 est de dimension 35, P_4 est de dimension 743 et P_5 de dimension 254475. Le calcul récursif de P_n est le suivant.

Proposition 1.4.1 *Soit e_1, e_2 des configurations sur Q_{n-1}. Nous notons $e_1 \times e_2$ la configuration sur $Q_n = Q_{n-1} \times L_2$ qui coïncide avec e_1 sur la première version de Q_{n-1} et avec e_2 sur la seconde.*

Si $P_{n-1}(e_1, e_2) \neq 0$ alors $e_1 \times e_2 \in \mathcal{A}_{Q_n}$. Dans le cas contraire, $e_1 \times e_2$ n'est pas admissible et n'a pas besoin d'être pris en compte.

Ainsi, pour des configurations admissibles $e_1 \times e_2$ et $e_3 \times e_4$,

$$P_n(e_1 \times e_2, e_3 \times e_4) = P_{n-1}(e_1, e_3) P_{n-1}(e_2, e_4) \quad .$$

Démonstration. La relation entre P_n et P_{n-1} repose sur l'égalité $g \times C_4 = g \times C_2 \times L_2$, pour g quelconque. Le graphe $g \times C_2$ est construit à partir de deux versions identiques de g. Si e_1, e_2 sont deux configurations sur g, nous notons $e_1 \times e_2$ la configuration sur $g \times C_2$ qui coïncide avec e_1 sur la première version de g et avec e_2 sur la seconde. Par exemple, 0_n peut s'écrire $0_{n-1} \times 0_{n-1}$. Si $g = Q_{n-1}$, alors $g \times C_2 = Q_n$. Des configurations f_1 et f_2 sur $g \times C_2$ peuvent s'écrire $f_1 = e_1 \times e_2$ et $f_2 = e_3 \times e_4$. Pour construire P_n, il nous faut donc d'abord déterminer les configurations admissibles $e_1 \times e_2$ sur Q_n. Elles correspondent à des produits de configurations compatibles sur Q_{n-1} et vérifient donc $P_{n-1}(e_1, e_2) \neq 0$. Il nous faut ensuite trouver les configurations sur Q_n incompatibles. Les configurations $e_1 \times e_2$ et $e_3 \times e_4$ sont des configurations sur Q_n incompatibles si e_1 et e_3 ou e_2 et e_4 sont des configurations sur Q_{n-1} incompatibles. La proposition 1.4.1 en découle.

■

Les fonctions de partition pour Q_3, Q_4 et Q_5 sont données dans le tableau 1.4. Pour Q_6 nous avons seulement calculé le nombre de configurations admissibles qui vaut

$$19,768,832,143.$$

Q_3	1	$+8\lambda$	$+16\lambda^2$	$+8\lambda^3$	$+2\lambda^4$	
Q_4	1	$+16\lambda$	$+88\lambda^2$	$+208\lambda^3$	$+228\lambda^4$	$+128\lambda^5$
	$+56\lambda^6$	$+16\lambda^7$	$+2\lambda^8$			
Q_5	1	$+32\lambda$	$+416\lambda^2$	$+2880\lambda^3$	$+11760\lambda^4$	$+29856\lambda^5$
	$+48960\lambda^6$	$+54304\lambda^7$	$+44240\lambda^8$	$+29920\lambda^9$	$+17952\lambda^{10}$	$+9088\lambda^{11}$
	$+3672\lambda^{12}$	$+1120\lambda^{13}$	$+240\lambda^{14}$	$+32\lambda^{15}$	$+2\lambda^{16}$	

TAB. 1.4: Fonctions de partition pour Q_3, Q_4 et Q_5.

1.5 Arbres échelles

Les mesures réversibles du PP sur des arbres ont été étudiées par Kelly [32] dans le cadre de modèles de bases de données. Kelly considère des sous-graphes finis d'arbres infinis réguliers (où tous les sommets sont de même degré) et montre que des mesures réversibles peuvent être construites à partir des restrictions d'une chaîne de Markov non-homogène à ces sous-graphes. Il donne également une condition suffisante de transition de phase pour des arbres réguliers infinis, *i.e.* une valeur critique du taux λ au-dessus de laquelle il n'y a pas unicité de la mesure réversible. Dans cette section nous considérons des arbres échelles. Ils sont construits à partir d'un graphe g répété le long d'un arbre (produit cartésien). Nous commençons par donner une équation de récurrence pour la fonction de partition sur ces graphes pour g quelconque. Nous envisageons ensuite le cas particulier $g = K_n$. Ceci ouvre la voie à une étude du phénomène de transition de phase qui peut se produire lorsque l'on fait tendre la taille de ces graphes vers l'infini. Nous reportons toutefois cette étude au chapitre 5 où nous généralisons le résultat de Kelly au cas $g = K_n$ avec $n \geq 2$.

Soit A_m^d un arbre fini construit de la manière suivante. Nous distinguons un sommet O de degré d qui est la racine de l'arbre. Chacun des d voisins de O possède également d voisins et ainsi de suite jusqu'à atteindre la hauteur m. La hauteur de l'arbre est la longueur du plus long chemin de la racine O à un sommet de l'arbre. De tels arbres peuvent être construits par récurrence. L'arbre A_m^d est obtenu en considérant d versions de A_{m-1}^d et en connectant leurs racines respectives à un nouveau sommet, la racine de A_m^d. Cette construction diffère légèrement de celle de Kelly. Celui-ci considère des arbres de Cayley où tous les sommets sont de degré r. Dans notre définition, tous les sommets sont de degré $d+1$ sauf la racine qui est de degré d. En ce qui concerne les résultats sur des arbres infinis, cette différence apparaît comme négligeable. Les résultats développés dans le chapitre 5 sont indifféremment valables pour l'arbre A_∞^d ou l'arbre de Cayley de degré $r = d + 1$. Nous utiliserons l'une ou l'autre forme selon ce qui est plus commode. Ici, nos calculs reposent sur la possibilité d'obtenir l'arbre A_m^d à partir de d copies de A_{m-1}^d en ajoutant un seul sommet. Ceci n'est pas vérifié par les arbres de Cayley.

Comme pour les lignes et les cycles (*cf.* définition 1.2.2), il est donc possible de définir des arbres échelles.

Définition 1.5.1 *Soit $g = (s, e)$ un graphe fini non orienté. Le produit cartésien $g \times A_m^d$ est appelé arbre échelle d'échelon g, de degré d et de hauteur m.*

La mesure réversible ν_G du PP sur un tel graphe $G = g \times A_m^d$ est un champ de Markov (ou de manière équivalente un système de cliques). Cette mesure peut également être vue comme un champ de Markov sur A_m^d si l'espace d'états $B = \{0, 1\}$ est changé en $B = \mathcal{A}_g$, l'ensemble des configurations admissibles sur g. Dans un arbre, les sous-graphes complets ont au plus deux sommets. Il en découle une factorisation de ν_G, analogue à (1.4) ou (1.7), faisant intervenir la matrice de compatibilité P_g indicée par $\mathcal{A}_g$. Toutefois, pour les arbres échelles avec $d > 1$, les expressions ne sont plus linéaires.

Proposition 1.5.1 *Soit $G = g \times A_m^d$ un arbre échelle. Soit Z_G la fonction de partition de* *la mesure réversible sur* G*. Nous pouvons écrire*

$$Z_G = \sum_{\eta_g \in \mathcal{A}_g} Z_m(\eta_g) \quad ,$$

où les $Z_m(\eta_g)$ *sont les composantes d'un vecteur* Z_m *indicé par* $\mathcal{A}_g$ *et défini par la récurrence suivante*

$$\begin{aligned} \forall m \geq 0, \quad Z_m &= [\, [\, P_g\,]^{(1/d)}.Z_{m-1}\,]^{(d)} \\ et \quad Z_{-1} &= (\, 1, 0, \ldots, 0\,)^t \quad , \end{aligned} \tag{1.29}$$

où pour tout vecteur ou matrice v*,* $[\, v\,]^{(d)}$ *désigne le vecteur ou la matrice dont les coefficients sont ceux de* v *à la puissance* d*.*

Démonstration. Notons g_m^o la version de g dans $g \times A_m^d$ qui correspond à la racine et η_m^o la restriction d'une configuration η à g_m^o. Pour tout $m \geq 0$ et tout η_g dans $\mathcal{A}_g$, définissons

$$Z'_m(\eta_g) = \sum_{\eta \in \mathcal{A}_G, \eta_m^o = \eta_g} \lambda^{\sum_{x \in S} \eta(x)} \quad .$$

Posons d'autre part $Z'_{-1} = (\, 1, 0, \ldots, 0\,)^t$. La fonction de partition Z_G est alors donnée par

$$Z_G = \sum_{\eta_g \in \mathcal{A}_g} Z'_m(\eta_g) \quad .$$

Si P_g est la matrice de compatibilité définie en (1.3), il est facile de voir que pour tout η_g dans $\mathcal{A}_g$ et $m \geq 0$

$$Z'_m(\eta_g) = (\sum_{\zeta_g \in \mathcal{A}_g} (P_g(\eta_g, \zeta_g))^{1/d} \cdot Z'_{m-1}(\zeta_g)\,)^d \quad . \tag{1.30}$$

La somme ci-dessus porte sur les configurations ζ_g compatibles avec η_g. Pour les autres configurations nous avons $P_g(\eta_g, \zeta_g) = 0$. Lorsque la configuration à la racine est fixée à η_g, l'arbre peut être séparé en d sous-graphes indépendants isomorphes à A_{m-1}^d. C'est une manière d'exprimer la propriété de Markov sur les arbres (voir la notion d'indépendance conditionnelle dans le chapitre 2) et d'expliquer l'exposant d dans la formule ci-dessus. Nous avons donc bien (1.29) et $Z_m = Z'_m$. Lorsque d vaut 1, nous retrouvons la formule (1.5) du cas ligne.

■

Dans ce qui suit nous simplifions les notations en écrivant simplement A_m pour $g \times A_m^d$ et Z_{A_m} pour sa fonction de partition. Nous considérons le cas particulier $g = K_n$. Dans ce cas, la matrice P_g a la forme particulière (1.21) et (1.29) conduit à la récurrence suivante.

Proposition 1.5.2 *Pour* $m \geq 1$*,*

$$Z_{A_m} = (Z_{A_{m-1}})^d + \frac{\lambda}{n^{d-1}} [\, (Z_{A_{m-2}})^d + (n-1) Z_{A_{m-1}}\,]^d \quad , \tag{1.31}$$

avec

$$\begin{aligned} Z_{A_0} &= Z_{K_n} = 1 + n\lambda \\ Z_{A_{-1}} &= Z_\emptyset = 1 \quad . \end{aligned}$$

Démonstration. Notons ξ une configuration non vide quelconque de $\mathcal{A}_g$. Du fait de la forme particulière de P_{K_n} (voir section 1.3), Z_m n'a que deux coefficients différents notés $Z_m(0_g)$ et $Z_m(\xi)$. Ainsi $Z_{A_m} = Z_m(0_g) + nZ_m(\xi)$. En appliquant (1.29) nous obtenons

$$\begin{aligned} Z_{A_m} &= (\ Z_{m-1}(0_g) + nZ_{m-1}(\xi)\ )^d + n\lambda(\ Z_{m-1}(0_g) + (n-1)Z_{m-1}(\xi)\ )^d \\ &= (\ Z_{A_{m-1}}\ )^d + n\lambda(\ Z_{m-1}(0_g) + (n-1)Z_{m-1}(\xi)\ )^d \quad . \end{aligned}$$

Or, par (1.30) nous avons aussi

$$Z_{m-1}(0_g) \ = \ (Z_{A_{m-2}})^d \, .$$

En écrivant

$$Z_{m-1}(\xi) \ = \ n^{-1}(Z_{A_{m-1}} - Z_{m-1}(0_g)) \, ,$$

nous en déduisons (1.31).

■

Lorsque l'on fait tendre m vers l'infini dans A_m, on obtient un graphe infini $A = K_n \times A_\infty^d$. Le PP sur A peut avoir plusieurs mesures réversibles. Nous étudirons plus précisément ce phénomène dans le chapitre 5.

Dans ce premier chapitre nous avons présenté un premier modèle de ressources partagées et donné un algorithme de calcul des mesures d'équilibre pour une classe de graphes couvrant la plupart des structures classiques. Différents paramètres de performance peuvent se déduire de ces calculs et nous informer sur les propriétés des systèmes. Au cours de cette étude sont apparues différentes notions importantes. La réversibilité du PP est essentielle pour le calcul de sa mesure d'équilibre. Nous consacrerons la première partie du chapitre 3 à la réversibilité pour des systèmes de particules plus généraux. La mesure réversible du PP se révèle être un champ de Markov et même un système de cliques. Cette simple observation soulève la question de l'équivalence de différentes propriétés de Markov lorsque les probabilités ne sont pas strictement positives. Nous faisons le point sur les relations entre ces propriétés dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Propriétés de Markov des champs aléatoires sur les graphes

Les propriétés des mesures réversibles du PP peuvent s'insérer dans un contexte plus large que nous avons envisagé dans [19] et que nous reprécisons dans ce chapitre. Considérer des modèles markoviens de ressources partagées à l'équilibre revient à modéliser des systèmes d'éléments qui interagissent. L'état de chaque élément (utilisateur) est décrit par une variable aléatoire et ces systèmes de variables aléatoires sont caractérisés par leurs lois de probabilité conjointes (les mesures d'équilibre). Nous appellerons indifféremment champs aléatoires ces systèmes de variables ou leurs lois de probabilité. Ce chapitre est plus théorique et dépasse le cadre des modèles de ressources partagées. En effet, dans de nombreuses autres situations, la représentation spatiale des éléments du système à l'aide d'un graphe est commode. Le graphe traduit des connaissances ou des hypothèses sur les relations de dépendance entre les différentes variables. Une démarche naturelle consiste à associer un sommet du graphe à chaque variable. Les dépendances entre variables sont alors traduites par la présence d'arêtes entre les sommets correspondants. Une telle représentation permet souvent une interprétation claire du problème. Cette dernière se lit sur le graphe sous forme d'une propriété de Markov qui précise le type de dépendance entre variables associées à des sommets voisins sur le graphe. Pour cette raison, nous consacrons ce chapitre à une approche abstraite des propriétés de Markov des champs aléatoires sur les graphes. Nous utilisons principalement des notions introduites dans le livre de Georgii [26]. Une propriété de Markov est une propriété qui caractérise les probabilités conditionnelles d'un champ aléatoire. Nous nous donnons donc des champs aléatoires et nous nous intéressons à leurs probabilités conditionnelles. Nous pouvons ainsi définir plusieurs propriétés de Markov dont certaines sont équivalentes sous des conditions appropriées. Dans la littérature ces propriétés sont souvent confondues et parfois sans précision des hypothèses sous lesquelles cela se justifie. Pour éviter toute confusion, nous examinons les relations qui existent entre les différentes propriétés de Markov et qui légitiment ou non qu'elles soient confondues. La notion centrale de cette étude est celle de champ aléatoire de Markov. Elle repose sur des considérations spatiales où le temps n'intervient pas. Un paramètre temporel supplémentaire sera introduit dans le chapitre 3.

Les champs aléatoires que nous considérons ici sont des ensembles de variables aléatoires indicées par un ensemble dénombrable S à valeurs dans un ensemble B au plus dénombrable.

Nous notons $\{w(x), x \in S\}$ un tel champ aléatoire.
L'ensemble S peut être vu comme un ensemble de sites dans l'espace auxquels sont attachés des particules. La variable $w(x)$ représente l'état de la particule au site x . La loi conjointe des variables $\{w(x), x \in S\}$ sera notée ν . Ces variables dépendent les unes des autres selon les positions respectives de leurs sites. Un graphe d'interactions $G = (S, E)$ non orienté localement fini rend compte des relations entre les variables attachées à ces sites. Les sommets du graphe sont les sites de S . L'ensemble E est l'ensemble des arêtes non orientées $\{x, y\}$ pour x et y dans S . Nous dirons que deux sites sont voisins si une arête du graphe les relie. Soit V un ensemble inclus dans S . Rappelons que son voisinage $N(V)$ dans G est défini par

$$N(V) \quad = \quad \{ \; x \in S \backslash V \text{ t.q. } \exists \; y \in V, \; \{x, y\} \in E \; \} \quad .$$

L'ensemble $V \cup N(V)$ sera noté $\overline{V}$. Pour $V = \{x\}$, nous écrirons simplement $N(x)$ pour $N(\{x\})$ et $\overline{x}$ pour $\{x\} \cup N(x)$.

Les interactions entre sites sont qualifiées de locales parce qu'elles sont réduites à des sites connectés sur le graphe. En particulier, les composantes connexes du graphe correspondent à des groupes de variables indépendantes. A l'intérieur d'une composante connexe, les dépendances entre variables peuvent être de plusieurs formes. Dans beaucoup de modèles des variables éloignées dans l'espace interagissent faiblement. Une manière de traduire cela est de supposer qu'un site, ou un ensemble de sites, n'est pas influencé par tous les autres sites mais seulement par une partie d'entre eux (par exemple les voisins sur le graphe G). Ce type de dépendance entre les variables correspond à des lois conjointes ν sur X qui vérifient des propriétés dites propriétés de Markov. Un cas particulier est celui où les variables sont indépendantes. Le graphe d'interactions G n'a pas d'arêtes et la loi conjointe est une loi produit $\bigotimes_{x \in S} \nu_x$ où ν_x est la loi de la variable $w(x)$. Un autre exemple est celui des chaînes de Markov. Le terme chaîne de Markov désigne en général une suite de variables aléatoires $\{w(x), x \in \mathbb{N}\}$ vérifiant la propriété suivante

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad \forall \; c_0, \ldots, c_{x+1} \in B, \quad P(\; w(0) = c_0, \ldots, w(x) = c_x \;) > 0 \; ,$$
$$P(\; w(x+1) = c_{x+1} \mid w(0) = c_0, \ldots, w(x) = c_x \;) \quad = \quad P(\; w(x+1) = c_{x+1} \mid w(x) = c_x \;) \; . \qquad (2.1)$$

L'équation (2.1) signifie qu'à un instant donné x toute l'information sur l'évolution passée de la chaîne susceptible d'être utilisée pour prédire l'état futur $w(x+1)$ est contenue dans l'état de la chaîne à l'instant x . Cette propriété admet une autre formulation où les notions de futur et passé jouent un rôle symétrique. L'équation (2.1) est équivalente à l'équation ci-dessous.

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad \forall \; c_0, \ldots, c_{x+1} \in B,$$
$$P(\; w(x+1) = c_{x+1} \; , \; w(0) = c_0 \; , \ldots , \; w(x-1) = c_{x-1} \mid w(x) = c_x \;)$$
$$=$$
$$P(\; w(x+1) = c_{x+1} \mid w(x) = c_x \;) \qquad P(\; w(0) = c_0 \; , \ldots , \; w(x-1) = c_{x-1} \mid w(x) = c_x \;) \; . \; (2.2)$$

L'équation (2.2) traduit l'indépendance du futur (indice $x+1$) et du passé (indices 0 à $x-1$) conditionnellement au présent (indice x). Il est encore possible de donner une troisième formulation équivalente à (2.1) et (2.2) mais de nature différente. Il s'agit de la possibilité de factoriser suivante

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad \forall\, c_0, \ldots, c_{x+1} \in B,$$

$$P(\ w(x+1) = c_{x+1}\ ,\ w(x) = c_x\ , \ldots,\ w(0) = c_0\ )$$

$$=$$

$$P(\ w(x+1) = c_{x+1} \mid w(x) = c_x\ ) \quad \ldots \quad P(\ w(1) = c_1 \mid w(0) = c_0\ )\ P(\ w(0) = c_0\ )\ . \qquad (2.3)$$

C'est l'une des propriétés (2.1) ou (2.2) que l'on appelle classiquement propriété de Markov. Par extension nous appellerons encore propriété de Markov une condition du type (2.3). Le cas des chaînes est particulier. L'ensemble S est $\mathbb{N}$ et l'indice x dans S a une interprétation temporelle. Le graphe d'interactions est le graphe dont les sommets sont indicés par $\mathbb{N}$, les arêtes reliant deux sommets consécutifs. Pour simplifier nous noterons encore $\mathbb{N}$ (de même pour $\mathbb{Z}$) ce graphe. Dans le cas plus général d'un graphe d'interactions G quelconque, on peut encore exprimer l'indépendance conditionnelle de deux groupes de variables par rapport à un troisième ou la possibilité de factoriser comme en (2.3). Les équations obtenues relèvent encore de propriétés dites propriétés de Markov. Certaines d'entre elles sont plus naturelles ou plus facilement vérifiables, d'autres plus utiles dans les calculs. L'objet de cette partie est de donner un certain nombre de propriétés de Markov généralisant les équations (2.1), (2.2) et (2.3) et d'examiner les relations qui existent entre elles. Nous verrons qu'elles ne sont pas toutes équivalentes. Plus précisément cette partie est organisée de la façon suivante. Après quelques rappels de théorie des graphes, nous donnons dans la section 2.1 les définitions des notions classiques de chaîne et champ de Markov en introduisant un formalisme et des notations utiles dans la suite. A l'aide de ce formalisme nous présentons dans la section 2.2 d'autres propriétés de Markov. Ces propriétés ne sont pas nouvelles. Les propriétés de Markov globale et locale apparaissent par exemple dans Georgii [26]. La première admet une caractérisation en termes d'indépendance conditionnelle. Nous la rappelons dans la proposition 2.2.2 qui reprend un lemme de Suomela [50]. Cette caractérisation est aussi mentionnée pour des graphes finis par Dawid et Lauritzen [12]. Le cadre de leur article est celui des tableaux de contingence en statistique. Les graphes y sont finis. Les sommets représentent des facteurs et les dépendances entre facteurs sont exprimées par des arêtes. L'indépendance conditionnelle et les propriétés de Markov apparaissent naturellement dans ces modèles (voir [11]). Pour la propriété de Markov locale nous avons voulu donner une caractérisation analogue. Nous avons donc introduit la notion de "cadre fini" (définition 2.2.3) et démontré la proposition 2.2.4. Dans la partie 2.2.3 nous parlons de la propriété de Markov unilatérale définie lorsque le graphe d'interactions est un arbre. Nous reprenons la définition de Georgii [26] d'une chaîne de Markov sur un arbre et donnons la caractérisation de Zachary [57] d'une telle chaîne. Notre apport personnel se situe dans la démonstration de la proposition 2.2.5 qui prouve l'équivalence entre les définitions de Georgii et de Zachary. Nous poursuivons avec d'autres propriétés de Markov classiques. Les systèmes de plus proches voisins (partie 2.2.4) sont aussi exposés dans Preston [42]. Les systèmes de cliques (partie 2.2.5) sont traités par Suomela [50]. Ils contiennent les chaînes de Markov sur les arbres et les mesures de Gibbs avec potentiel de plus proches voisins. Nous ne nous attardons pas sur ces dernières. Une référence possible est [42]. Les mesures de Gibbs définies par un potentiel sont des lois de probabilité strictement positives en un sens que nous préciserons. Dans ce cas, la plupart des propriétés de Markov sont équivalentes et il n'y a pas tellement lieu de les distinguer. Nous avons voulu nous affranchir de cette hypothèse de positivité. Nous consacrons la partie 2.2.7 aux probabilités non strictement positives. Nous utilisons le travail de Suomela [50] et donnons sa condition "w_o" (définition 2.2.9) sous laquelle certaines équivalences entre propriétés de Markov restent vraies. L'intérêt de cette condition réside dans la possibilité d'utiliser la formule d'inversion de Möbius. Nous rappelons ce principe d'inversion. Une référence possible est [52] mais nous utiliserons aussi la terminologie de Kelly et Ripley [30]. Après la présentation des propriétés de Markov, la section 2.3 qui suit précise les relations qui peuvent exister entre elles. En début de section, un diagramme résume les relations développées dans cette partie. Nous partons du cas général c'est-à-dire sans hypothèses particulières, ni sur la nature du graphe d'interactions, ni sur celle des mesures de probabilités. Nous nous appuyons sur des résultats de Georgii [26] et Suomela [50] et nous donnons quelques contre-exemples nouveaux. Nous précisons ensuite l'étude en nous restreignant à des graphes d'interactions appartenant à une classe de graphes dits triangulés. Leur définition peut se trouver dans Berge [4]. Ils apparaissent naturellement dans les références sur les tableaux de contingence (voir [11] et [12]). Nous nous servons de résultats de [12] sans les redémontrer sauf pour la proposition 2.3.7 dont nous donnons une démonstration personnelle. Nous présentons la notion de graphes "repliables". Le terme n'est pas courant en théorie des graphes. C'est notre traduction de la notion de "collapsibility" introduite dans [1]. Nous montrons le lien avec les graphes triangulés dans la proposition 2.3.3. Grâce à ces outils nous montrons que lorsque le graphe d'interactions est triangulé, une mesure vérifiant la propriété de Markov globale est un système de cliques. Ce résultat est connu pour des graphes finis (voir [12]), nous le démontrons pour des graphes infinis. D'autre part nous montrons que la propriété de Markov locale (celle qui correspond à la notion de champ de Markov) n'est pas suffisante pour avoir un système de cliques, même pour des graphes triangulés. Nous nous inspirons des contre-exemples donnés par Suomela [50] pour construire sur un graphe triangulé ($\mathbb{Z}$ dans notre contre-exemple) un champ de Markov qui n'est pas un système de cliques. Dans la classe des graphes triangulés, nous examinons plus précisément le cas des arbres dans la partie 2.3.3. Sur $\mathbb{Z}$, l'équivalence entre la propriété de Markov globale et la propriété unilatérale des chaînes est un résultat démontré dans Georgii [26] (proposition 2.2.1 de notre étude). Nous n'avons pas trouvé dans les diverses références citées de résultat analogue pour les arbres. Nous pensons donc apporter un résultat nouveau en prouvant (dans la partie 2.3.3) que l'équivalence reste effectivement vraie. Nous apportons un deuxième type de précisions en considérant le cas où les mesures de probabilité vérifient la condition "w_o". Les résultats de cette section sont ceux de Suomela [50] mais certains détails de démonstration que nous donnons sont personnels. Sous "w_o", systèmes de plus proches voisins, systèmes de cliques et champs de Markov sont équivalents. Si de plus le graphe d'interactions est un arbre, il est possible de donner une condition sous laquelle un système de cliques est une chaîne de Markov. Nous utilisons pour cela des résultats de Georgii [26] et Zachary [57]. Pour finir nous donnons un cas de probabilité non strictement positive sur $\mathbb{Z}$ où toutes les propriétés de Markov (à l'exception de la propriété d'être une mesure de Gibbs avec potentiel de plus proches voisins) sont équivalentes.

2.1 Chaînes et champs de Markov

L'objet de cette partie est de traduire les notions classiques de chaînes et de champs de Markov dans un formalisme qui permettra d'introduire facilement les autres propriétés de Markov. Nous commençons par rappeler quelques définitions de théorie des graphes utiles dans la suite. Une référence est par exemple [4]. Nous nous limitons à des graphes simples non orientés.

Définition 2.1.1 *Soit $G = (S, E)$ un graphe et V un sous-ensemble de sommets de G . Le sous-graphe de G engendré par V est le graphe noté G_V dont les sommets sont les points de V et dont les arêtes sont les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans V .*

Définition 2.1.2 *Un chemin σ de longueur q est une séquence d'arêtes de G*

$$\sigma = (e_1, e_2, \ldots, e_q)$$

telles que pour i de 2 à $q-1$, e_i a une extrémité en commun avec e_{i-1} et l'autre avec e_{i+1} .

Nous ne considérons que des graphes simples, sans boucles ni arêtes multiples. Un chemin σ peut donc encore être décrit par ses sommets $(x_1, \ldots, x_{q+1})$ plutôt que par ses arêtes $(e_1, \ldots, e_q)$ avec $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ pour i de 1 à q .

Définition 2.1.3 *Un graphe connexe est un graphe tel que pour toute paire de sommets distincts x et y il existe un chemin reliant ces deux points.*

Nous parlerons aussi par abus de langage de sous-ensemble de sommets V connexe si le graphe engendré G_V est connexe.

Définition 2.1.4 *Une composante connexe d'un graphe $G = (S, E)$ est un sous-ensemble de sommets maximal (pour l'inclusion) V tel que le sous-graphe engendré G_V est connexe. L'ensemble des composantes connexes de G forme une partition de S .*

Définition 2.1.5 *Soit V un sous-ensemble de sommets. L'intérieur de V est l'ensemble noté $\mathring{V}$ défini par*

$$\mathring{V} = \{x \in V \ , \ N(x) \subset V\} \ ,$$

où $N(x)$ est l'ensemble des voisins de x sur le graphe.

Le bord de V est l'ensemble $\partial V = V \setminus \mathring{V}$.

D'autres définitions seront introduites au fur et à mesure des besoins. Quelques notations sont également nécessaires. Nous nous intéressons à des ensembles de variables aléatoires $\{w(x), x \in S\}$ et à leurs lois conjointes. Ces lois sont des mesures de probabilité ν sur X ou plus précisément sur la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par les cylindres de bases finies, ou encore par les variables $\{w(x), x \in S\}$. Pour une partie V de S, nous notons $X_V = B^V$ et $\mathcal{F}_V$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les variables $\{w(x), x \in V\}$. Nous noterons encore ces variables $w(V)$. La tribu $\mathcal{F}_V$ est la tribu des événements $w(V)$-mesurables. Si l'on considère l'ordre induit par l'inclusion, on peut remarquer que $\mathcal{F}_V$ grandit quand V grandit. Notons $\mathcal{P}_f(S)$ l'ensemble des parties finies de S . Nous avons

$$\mathcal{F} = \bigcup_{V \in \mathcal{P}_f(S)} \mathcal{F}_V \ .$$

En vue d'une généralisation des propriétés (2.1) et (2.2) des chaînes de Markov à un graphe de dépendance quelconque, il nous faut abandonner l'interprétation temporelle pour une interprétation spatiale de S en tant qu'ensemble de sites. Aussi nous appelons chaîne de Markov une mesure de probabilité sur $(B^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$ plutôt qu'une suite de variables aléatoires $\{w(x), x \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans B dénombrable. Ceci nous permet d'étendre la définition d'une chaîne de Markov à $S = \mathbb{Z}$ de sorte que le terme chaîne de Markov désignera la loi conjointe d'une suite de variables $\{w(x), x \in \mathbb{Z}\}$. Cela revient à considérer un état d'équilibre du système plutôt que la dynamique qui y conduit. De la même manière, les propriétés de Markov concernent des mesures de probabilité. Pour une mesure ν nous reprenons la notation introduite dans [55] .

Définition 2.1.6 *Pour une partie V de S, nous dirons que ν vérifie la propriété $M(V)$ si*

$$\forall\, Y\ \mathcal{F}_V - mesurable, \quad \mathbb{E}[\, Y \mid \mathcal{F}_{S \setminus V}\,] \;=\; \mathbb{E}[\, Y \mid \mathcal{F}_{N(V)}\,] \quad \nu - p.s.$$

où les espérances sont calculées par rapport à la loi ν .

Selon les ensembles V pris dans la définition ci-dessus, on obtient différentes propriétés de Markov. Nous donnons pour commencer le cas des chaînes de Markov.

Définition 2.1.7 *Une mesure de probabilité ν sur $(B^{\mathbb{Z}}, \mathcal{F})$ est une chaîne de Markov si et seulement si,*

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad M(]\, x, \infty\, [) \quad \textit{est vérifiée.} \tag{2.4}$$

La condition (2.4) définit une propriété de Markov dite unilatérale que nous noterons dans la suite **(MU-)**$(\mathbb{Z})$. De façon symétrique une autre propriété de Markov unilatérale notée **(MU+)**$(\mathbb{Z})$ peut être définie si

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad M(]-\infty, x\, [) \quad \text{est vérifiée.} \tag{2.5}$$

Il vient alors le résultat suivant (voir par exemple Georgii [26] p. 193).

Proposition 2.1.1 *Les propriétés de Markov unilatérales* **(MU-)***$(\mathbb{Z})$ et* **(MU+)***$(\mathbb{Z})$ sont équivalentes.*

Ces propriétés ne sont que des formulations équivalentes de la propriété "d'indépendance du passé et du futur conditionnellement au présent", caractéristique des chaînes de Markov. Pour le voir, il suffit de se reporter à la notion d'indépendance conditionnelle telle qu'elle est présentée dans [14] p. 59. On peut aussi se référer à l'équation (2.8) dans la suite. Les propriétés de Markov unilatérales sont liées dans leur formulation à une interprétation temporelle et n'ont de sens que pour $\mathbb{Z}$ ou éventuellement pour un graphe connexe sans cycle (arbre) comme détaillé dans la section 2.2.3. Pour un tel graphe A (dont $\mathbb{Z}$ est un cas particulier) nous verrons dans cette section qu'il n'y a pas lieu de distinguer les propriétés **(MU+)**(A) et **(MU-)**(A) . Elles peuvent être regroupées en une seule propriété unilatérale **(MU)**(A) . La proposition 2.1.1 confirme que les notions de passé et de futur sont interchangeables comme cela apparaît dans une formulation de type (2.2). Aussi nous nous contenterons d'écrire **(MU)**$(\mathbb{Z})$ et plus tard **(MU)**(A) .

Plus généralement, il est possible de définir une notion de dépendance locale pour un graphe G quelconque. Pour cela, il faut passer à une interprétation spatiale de S . Les termes passé, présent, futur doivent être remplacés par le terme voisinage. La notion qui correspond est celle de champ de Markov. Nous donnons la définition de Georgii [26] (8.24) p. 157. Pour une telle mesure, ce qui se passe sur un ensemble fini de sites V n'est affecté que par les sites de $N(V)$, voisins de V .

Définition 2.1.8 *Une mesure de probabilité ν sur $(X, \mathcal{F})$ est un champ de Markov si et seulement si elle vérifie la propriété de Markov locale, notée* **(ML)** *, suivante*

$$\forall V \in \mathcal{P}_f(S)\,, \quad M(V) \quad \textit{est vérifiée} \qquad \textbf{(ML)} \quad . \tag{2.6}$$

Une hypothèse de positivité de ν est souvent incluse dans la définition d'un champ de Markov. Ce n'est pas le cas ici.

Définition 2.1.9 *Une mesure de probabilité ν sur $(X, \mathcal{F})$ est dite positive si elle vérifie*

$$\forall\, V \in\, \mathcal{P}_f(S)\,, \quad \forall\, \gamma \in X_V, \quad \nu(\gamma) > 0 \quad .$$

Sous cette condition, la plupart des propriétés de Markov dont nous allons parler sont équivalentes. Dans un cadre plus général il faut les distinguer. Dans la partie 2.2.7, nous donnons une condition plus faible que la positivité, sous laquelle certaines équivalences restent vraies.

Dans la suite, nous verrons qu'une chaîne de Markov est un champ de Markov sur $\mathbb{Z}$. La réciproque est fausse. Un exemple simple de champ de Markov sur $\mathbb{Z}$ qui n'est pas une chaîne est donné en 2.3.1. Ceci fait apparaître que la notion de champ de Markov ne peut pas être vue comme la généralisation à S quelconque de la notion de chaîne sur $\mathbb{Z}$. Dans la partie suivante, nous introduisons d'autres propriétés de Markov en faisant varier la nature des sous-ensembles V pour lesquels $M(V)$ est satisfaite.

2.2 Propriétés de Markov

2.2.1 Propriété de Markov globale (MG)

Cette propriété apparaît dans [26] p. 157.

Définition 2.2.1 *Une mesure de probabilité ν vérifie la propriété de Markov globale, notée* **(MG)** *si*

$$\forall\, V \subset S, \quad M(V) \quad \textit{est vérifiée} \qquad \textbf{(MG)} \quad .$$

Cette propriété semble une meilleure généralisation de la notion de chaîne de Markov. En effet, sur $\mathbb{Z}$ on peut montrer (*cf.* Georgii [26] p. 194 remarque (2)) la propriété qui suit. Une propriété de Markov est attachée à un graphe d'interactions. C'est ce que nous voulons préciser avec la notation **(MG)**($\mathbb{Z}$) .

Proposition 2.2.1 **(MG)***($\mathbb{Z}$) est équivalente à la propriété unilatérale* **(MU)***($\mathbb{Z}$)* .

Il est également possible de définir une chaîne de Markov sur un arbre comme nous le précisons dans la section 2.2.3. Dans la section 2.3.3, nous montrons que **(MG)**(A) est encore équivalente à **(MU)**(A).

Dans l'introduction nous avons mentionné qu'une caractérisation possible des chaînes de Markov sur $\mathbb{Z}$ était l'indépendance conditionnelle du passé et du futur par rapport au présent (équation (2.2)). Sur $\mathbb{Z}$ la propriété **(MG)** est donc équivalente à une propriété d'indépendance conditionnelle. Pour un graphe quelconque, nous ne disposons plus de l'interprétation temporelle mais nous pouvons encore formuler **(MG)** en termes d'indépendance conditionnelle. Pour cela nous avons besoin de la notion d'ensembles séparants définie dans Suomela [50] p. 10. Deux sommets d'un graphe seront dits déconnectés s'il n'existe pas de chemin les reliant.

Définition 2.2.2 *Soit le graphe $G = (S, E)$. Soit U un sous-ensemble de S et V, W deux sous-ensembles disjoints de $S \backslash U$. L'ensemble U sépare V et W dans G si dans le sous-graphe $G_{S\backslash U}$ tout sommet de V est déconnecté de tout sommet de W .*

Par exemple dans $G = (S, E)$, pour tout sous-ensemble V de S, $N(V)$ sépare V et $S\backslash\overline{V}$ (rappelons que $\overline{V} = V \cup N(V)$). De même dans $\mathbb{Z}$, pour tout x de $\mathbb{Z}$, $\{x\}$ sépare $]-\infty, x-1]$ et $[x+1, \infty[$. Avec la proposition 2.2.2, qui n'est autre que le lemme 2.7 p. 14 dans [50], nous allons voir comment retrouver alors l'équation (2.1). Avant cela, nous rappelons un lemme dû à Vorobev (lemme 1.5 dans [53]), utile pour la démonstration de cette proposition.

Lemme 2.2.1 *Si U sépare V et W dans $G = (S, E)$, il existe une partition $\{V', W', U\}$ de S telle que V' contient V , W' contient W et U sépare V' et W' dans G .*

Pour alléger l'écriture, nous notons Y_V une variable $\mathcal{F}_V$-mesurable intégrable.

Proposition 2.2.2 *La propriété* **(MG)** *est équivalente à la propriété d'indépendance conditionnelle suivante. Pour tout V, W, U tels que U sépare V et W dans G,*

$$\forall\, Y_V, \forall\, Y_W, \quad \mathbb{E}[\, Y_V\, Y_W \mid \mathcal{F}_U\,] \;=\; \mathbb{E}[\, Y_V | \mathcal{F}_U\,]\, \mathbb{E}[\, Y_W | \mathcal{F}_U\,] \quad \nu - p.s. \tag{2.7}$$

Démonstration. L'équation (2.7) exprime simplement l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{F}_V$ et $\mathcal{F}_W$ par rapport à $\mathcal{F}_U$ lorsque U sépare V et W . Or il existe (voir par exemple [14] p. 59) une autre formulation équivalente de (2.7),

$$\forall\, Y_V, \quad \mathbb{E}[\, Y_V \mid \mathcal{F}_{U \cup W}\,] \;=\; \mathbb{E}[\, Y_V | \mathcal{F}_U\,] \quad \nu - p.s. \tag{2.8}$$

Aussi, pour tout V inclus dans S en posant $U = N(V)$ qui sépare V et $W = S \backslash \overline{V}$, nous pouvons appliquer (2.8) pour obtenir

$$\mathbb{E}[\, Y_V \mid \mathcal{F}_{S \backslash V}\,] \;=\; \mathbb{E}[\, Y_V | \mathcal{F}_{N(V)}\,] \quad \nu - p.s.$$

D'où **(MG)** .

Inversement, soit U séparant V et W dans G . Par le lemme de Vorobev il existe V' et W' tels que $\{U, V', W'\}$ forme une partition de S, U sépare V' et W', avec V' contenant V et W' contenant W . Donc $U \cup W' = S \backslash V'$ et par $M(V')$ il vient pour toute variable $Y_{V'}$,

$$\mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_{U \cup W'}\,] \;=\; \mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_{S \backslash V'}\,] \;=\; \mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_{N(V')}\,] \quad \nu - p.s.$$

D'autre part, puisque U sépare V' et W' l'ensemble $N(V')$ est inclus dans U . Si ce n'était pas le cas, il existerait un point voisin de V' dans W' et V' serait connecté à W' dans $G \backslash U$. Nous en déduisons que $\mathcal{F}_{N(V')}$ est inclus dans $\mathcal{F}_U$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_{N(V')}\,] &= \mathbb{E}[\, \mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_{N(V')}\,] \mid \mathcal{F}_U\,] \\ &= \mathbb{E}[\, \mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_{S \backslash V'}\,] \mid \mathcal{F}_U\,] \qquad \text{par } M(V') \\ &= \mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_U\,] \qquad\qquad \text{car } U \subset S \backslash V' \quad . \end{aligned}$$

D'où

$$\forall\, Y_{V'}, \quad \mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_{U \cup W'}\,] = \mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_U\,] \quad \nu - p.s.$$

ou encore

$$\forall\, Y_{V'},\ \forall\, Y_{W'}, \quad \mathbb{E}[\, Y_{V'}\, Y_{W'} \mid \mathcal{F}_U\,] = \mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_U\,]\ \mathbb{E}[\, Y_{W'} \mid \mathcal{F}_U\,] \quad \nu - p.s.$$

Puisque V est inclus dans V' et W dans W', nous en déduisons (2.7).

■

Remarquons que pour obtenir l'équivalence avec **(MG)** , il suffit d'avoir (2.7) pour tous V et W finis séparés par U quelconque dans G . Pour le voir, il faut appliquer le théorème des classes monotones car $\mathcal{F}_V$, pour V quelconque, est engendrée par les cylindres de bases finies

$$\{w(W) = \gamma\ ,\ \ W \in \mathcal{P}_f(S)\ ,\ \ W \subset V\ ,\ \ \gamma \in X_W\} \quad .$$

Il faut noter que dans [50] Suomela semble assimiler propriété **(MG)** et champ de Markov. Nous allons voir que la notion de champ de Markov est en fait plus faible que **(MG)** .

2.2.2 Propriété de Markov locale (ML)

La propriété de Markov locale **(ML)** caractérise les champs de Markov (voir définition 2.1.8). Considérons le cas où S est égal à $\mathbb{Z}$. Soient x et y dans $\mathbb{Z}$. Nous notons $[x, y]$ l'ensemble des entiers de x à y . La propriété **(ML)** est vérifiée si et seulement si pour tout x, y dans $\mathbb{Z}$ on a $M([x, y])$. Cette dernière propriété est dite bilatérale par comparaison avec la propriété de Markov unilatérale des chaînes. La condition **(ML)** est clairement plus faible que la condition **(MG)** . D'autre part, dans $M(V)$, on conditionne par ce qui se passe sur les sites de $S \backslash V$ (*i.e.* hors de V). Il est possible de ne conditionner que par une partie des sites hors de V pourvu que cette partie contienne toute l'information sur le voisinage de V dans le graphe d'interactions G et qu'elle puisse être prise arbitrairement grande dans $S \backslash V$. Ainsi, nous pouvons donner une autre formulation de **(ML)** .

Proposition 2.2.3 *Pour tout sous-ensemble V fini de S, la propriété $M(V)$ est équivalente à*

$$\forall\, W \in \mathcal{P}_f(S) \text{ avec } W \supset \overline{V}, \quad \mathbb{E}[\, Y_V \mid \mathcal{F}_{W \backslash V} \,] \;=\; \mathbb{E}[\, Y_V \mid \mathcal{F}_{N(V)} \,] \quad \nu - p.s. \tag{2.9}$$

D'où **(ML)** *est équivalente à*

$$\forall\, V, W \in \mathcal{P}_f(S) \;\text{ avec } W \supset \overline{V}, \quad \mathbb{E}[\, Y_V \mid \mathcal{F}_{W \backslash V} \,] \;=\; \mathbb{E}[\, Y_V \mid \mathcal{F}_{N(V)} \,] \;\; \nu - p.s. \tag{2.10}$$

Pour voir le premier point, il suffit de prendre une suite d'ensembles $W_n \backslash V$ croissante vers $S \backslash V$ avec W_n contenant $\overline{V}$ pour tout entier n, et de passer à la limite dans (2.9) en appliquant le théorème de convergence des martingales.

Donnons à présent une caractérisation de **(ML)** en termes d'indépendance conditionnelle. La propriété **(ML)** étant plus faible que **(MG)** , nous avons l'analogue de la proposition 2.2.2 en nous restreignant à un certain type d'ensembles U, V, W . Le lemme 1.5 de Vorobev [53] ne suffit plus. Il faut imposer en plus à U, V, W de former un "cadre fini".

Définition 2.2.3 *Nous dirons que U, V, W définissent un "cadre fini" s'il existe une partition de S en U, V', W' telle que V' contient V, W' contient W avec V' (ou W') fini et U séparant V' et W' .*

Il s'agit effectivement d'une restriction. Considérons par exemple en dimension deux la grille infinie dont les sites sont indicés par $\mathbb{Z}^2$. Soit U l'ensemble des sites d'abscisse 0. Prenons pour V et W deux ensembles finis de sites, d'abscisses négatives pour V et positives pour W . L'ensemble U sépare bien V et W mais il n'existe pas de partition de $\mathbb{Z}^2$ satisfaisant la définition 2.2.3.

En ce qui concerne **(ML)** , l'indépendance conditionnelle s'écrit alors

Proposition 2.2.4 *La propriété* **(ML)** *est équivalente à l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{F}_V$ et $\mathcal{F}_W$ par rapport à $\mathcal{F}_U$, pour tout U, V, W formant un cadre fini.*

Démonstration. Soit V fini. Posons $U = N(V)$ et $W = S\backslash\overline{V}$. Les ensembles U, V, W forment clairement un cadre fini. Si $\mathcal{F}_V$ et $\mathcal{F}_W$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{F}_U$, nous en déduisons $M(V)$ du fait de l'équivalence entre les équations (2.7) et (2.8).

Inversement, supposons $M(V)$ satisfaite pour tout V fini et considérons un cadre fini U, V, W . Il existe une partition de S en U, V', W' dans laquelle nous pouvons supposer V' fini. En reprenant la démonstration de la proposition 2.2.2, $M(V')$ implique alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_{U\cup W'}\,] &= \mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_{N(V')}\,] \\ &= \mathbb{E}[\, Y_{V'} \mid \mathcal{F}_{U}\,] \quad \text{car} \quad N(V') \subset U \subset U \cup W' \quad . \end{aligned}$$

D'où l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{F}_{V'}$ et $\mathcal{F}_{W'}$ par rapport à $\mathcal{F}_U$ et donc celle de $\mathcal{F}_V$ et $\mathcal{F}_W$ par rapport à $\mathcal{F}_U$.

■

2.2.3 Cas des arbres

Avant d'introduire d'autres propriétés de Markov, nous nous intéressons plus particulièrement à une certaine classe de graphes d'interactions, les arbres ou graphes connexes sans cycles. Lorsque le graphe d'interactions G est un arbre, nous le noterons plutôt A et nous parlerons de **(MG)**(A) , **(ML)**(A) , *etc.* Il est possible de définir une chaîne de Markov sur un arbre. Georgii y consacre le chapitre 12 p. 239 dans [26]. Nous reprenons quelques-unes de ses notations. Soient x et y deux sommets quelconques. Il existe un unique chemin de x à y . La longueur de ce chemin est le nombre d'arêtes qui le constituent. On peut définir la distance d sur A en définissant $d(x, y)$ comme la longueur du chemin de x à y . Pour toute arête $\{x, y\}$ de l'arbre, nous notons xy l'arête orientée de x vers y . L'ensemble $\vec{L}$ est l'ensemble de toutes les arêtes orientées. Il contient par exemple xy et yx . Pour tout sommet z de l'arbre, l'ensemble $\vec{L}$ se décompose en deux sous-ensembles $\vec{L}^z$ et ${}^z\vec{L}$. $\vec{L}^z$ est l'ensemble des arêtes orientées qui pointent en direction de z et ${}^z\vec{L}$ l'ensemble des arêtes orientées qui pointent hors de z . Plus précisément

$$\begin{aligned} \vec{L}^z &= \{xy \in \vec{L} \quad t.q. \quad d(z, x) = d(z, y) + 1\} \quad . \\ {}^z\vec{L} &= \{xy \in \vec{L} \quad t.q. \quad d(z, y) = d(z, x) + 1\} \quad . \end{aligned}$$

De la même manière, chaque arête orientée xy dans $\vec{L}$ découpe l'ensemble des sommets S en deux sous-ensembles. Le "futur" $]xy, \infty[$ et le "passé" $]-\infty, xy[$. Le futur est l'ensemble des sommets rencontrés (comprenant y) si l'on parcourt l'arbre en partant selon la direction xy . Le passé est l'ensemble des autres sommets. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}]xy, \infty[&= \{z \in S, xy \in \vec{L}^z\} \quad . \\ ]-\infty, xy[&= \{z \in S, xy \in {}^z\vec{L}\} \quad . \end{aligned}$$

La définition suivante qui reprend la définition 12.2 p. 239 de [26] définit une chaîne sur un arbre par une propriété de Markov unilatérale analogue au cas de $\mathbb{Z}$.

Définition 2.2.4 *Une mesure de probabilité ν sur $(X, \mathcal{F})$ est une chaîne de Markov si*

$$\forall\ xy \in \vec{L}, \quad M(]xy, \infty[) \quad \textit{est vérifiée,} \tag{2.11}$$

ou de manière équivalente

$$\forall\ xy \in \vec{L}, \quad M(]-\infty, xy[) \quad \textit{est vérifiée.} \tag{2.12}$$

De plus la matrice stochastique définie sur B par

$$\forall \gamma, \delta \in B, \quad P_{xy}(\gamma, \delta) \;\; = \;\; \nu(\ w(y) = \delta \mid w(x) = \gamma\ )$$

est appelée matrice de transition de x à y pour ν .

Les équations (2.11) et (2.12) sont en fait identiques car $]xy, \infty[$ est égal à $]-\infty, yx[$. Nous les noterons $\mathbf{(MU)}(A)$. Le cas des arbres contient celui de $\mathbb{Z}$. Il suffit de poser $y = x+1$ et d'appliquer (2.11) pour retrouver $\mathbf{(MU\text{-})}(\mathbb{Z})$ et (2.12) pour retrouver $\mathbf{(MU+)}(\mathbb{Z})$. Notons que $N(]xy, \infty[)$ est égal à $\{x\}$ et $N(]-\infty, xy[)$ est égal à $\{y\}$. Rappelons que Y_V représente une variable $\mathcal{F}_V$-mesurable intégrable.
La propriété $M(]xy, \infty[)$ s'écrit

$$\forall\ Y_{]xy,\infty[}\ , \quad \mathbb{E}[\ Y_{]xy,\infty[} \mid \mathcal{F}_{]-\infty,xy[}\ ] = \mathbb{E}[\ Y_{]xy,\infty[} \mid \mathcal{F}_{\{x\}}\ ] \quad \nu - p.s.$$

Une autre formulation nous sera utile dans la démonstration de la proposition suivante. Il est possible de montrer (voir [26] p. 240 remarque (1)) que l'équation (2.11) est équivalente à

$$\forall\ xy \in \vec{L},\ \forall Y_{\{y\}}, \quad \mathbb{E}[\ Y_{\{y\}} \mid \mathcal{F}_{]-\infty,xy[}\ ] \;\; = \;\; \mathbb{E}[\ Y_{\{y\}} \mid \mathcal{F}_{\{x\}}\ ] \quad \nu - p.s. \tag{2.13}$$

Nous retrouvons également une factorisation des probabilités marginales analogue au cas de $\mathbb{Z}$. C'est la remarque (2) p. 240 dans [26] et l'objet de la proposition 2.2.5. Notons $\mathcal{P}_f^\star(S)$ l'ensemble des sous-ensembles finis connexes de S . Pour simplifier les écritures, dans ce chapitre nous notons η^V (plutôt que $\eta(V)$) la restriction de la configuration η au sous-ensemble V.

Proposition 2.2.5 *Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) ν est une chaîne de Markov sur un arbre.
(ii) $\forall V \in \mathcal{P}_f^\star(S),\ \ \forall \eta \in X,\ \ \forall z \in V,$

$$\nu(\eta^V) \;\; = \;\; \nu(\eta(z)) \prod_{xy \in {}^z\vec{L} : x,y \in V} P_{xy}(\eta(x), \eta(y)) \quad . \tag{2.14}$$

(iii) Pour tout V dans $\mathcal{P}_f^\star(S)$, la probabilité marginale de ν sur V est un champ de Markov. Ce qui revient à dire que pour tout V fini connexe et pour tout W inclus dans V,

$$\forall\ Y_W, \quad \mathbb{E}[\ Y_W \mid \mathcal{F}_{V \setminus W}\ ] \;\; = \;\; \mathbb{E}[\ Y_W \mid \mathcal{F}_{V \cap N(W)}\ ] \quad \nu - p.s. \tag{2.15}$$

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ se démontre par induction sur $|V|$ comme indiqué dans la remarque (2) p. 240 de [26].

Pour $(ii) \Rightarrow (iii)$, l'égalité (2.15) se démontre en utilisant (2.14) de manière analogue à la remarque (6) p. 240 de [26]. Il suffit de remplacer dans la démonstration de Georgii Λ par W et Δ par V .

Pour montrer $(iii) \Rightarrow (i)$, posons

$$\forall n \geq 1, \quad \Delta(n) = \{z \in S,\ d(z,y) \leq n\} \qquad \text{et} \qquad \Lambda(n) = \Delta(n) \cap]-\infty, xy[\ .$$

Nous avons $\forall n \geq 1, \quad \Lambda(n) \in \mathcal{P}_f^\star(S)$.
Posons,

$$W = \{y\} \quad \text{et} \quad V = \{y\} \cup \Lambda(n) \ .$$

Nous avons $N(W) \cap \Lambda(n) = \{x\}$. En appliquant (2.15), il vient

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}[\, Y_{\{y\}} \mid \mathcal{F}_{\Lambda(n)}\,] = \mathbb{E}[\, Y_{\{y\}} \mid \mathcal{F}_{\{x\}}\,] \quad \nu - p.s.$$

D'autre part $\Lambda(n)$ peut être pris arbitrairement grand dans $]-\infty, xy[$. En appliquant le théorème de convergence des martingales, il vient

$$\mathbb{E}[\, Y_{\{y\}} \mid \mathcal{F}_{]-\infty,xy[}\,] = \mathbb{E}[\, Y_{\{y\}} \mid \mathcal{F}_{\{x\}}\,] \quad \nu - p.s.$$

Ce qui montre l'équation (2.13) et donc $\mathbf{(MU)}(A)$.

■

L'assertion (iii) est la définition d'une chaîne de Markov sur un arbre donnée par Zachary dans [57] p. 895. Il faut noter la différence entre (2.15) et (2.10). L'équation (2.15) implique clairement la propriété $\mathbf{(ML)}(A)$. Il suffit de prendre dans (2.15) W tel que $\overline{W}$ soit inclus dans V . De plus, $\mathbf{(MG)}(A)$ implique (2.15) pour A arbre. Pour un arbre, $V \cap N(W)$ sépare W et $V \backslash \overline{W}$ dans A_V le sous-arbre de A construit sur V et donc aussi dans A . Ceci n'est pas forcément vrai pour des graphes quelconques. La proposition 2.3.5 donne plus de détails et la proposition 2.3.3 précise ce qui se passe pour des graphes triangulés. D'autres implications sont précisées dans la partie 2.3.3.

2.2.4 Systèmes de plus proches voisins (SPPV)

Lorsque l'on veut exprimer des dépendances locales pour un ensemble de sites, on commence souvent par regarder ce qui se passe en un site x étant donné l'ensemble de ses voisins $N(x)$. Ceci revient à se donner des probabilités conditionnelles du type $\nu(\eta(x) \mid \eta^{N(x)})$. Aussi on trouve parfois comme définition d'un champ de Markov la définition suivante.

Définition 2.2.5 *Une mesure de probabilité ν sur $(X, \mathcal{F})$ est un système de plus proches voisins* **(SPPV)** *si*

$$\forall\, x \in S\,, \qquad M(\{x\}) \quad \textit{est vérifiée.} \tag{2.16}$$

Les notions de **(SPPV)** et de champ de Markov sont différentes (voir les exemples en partie 2.3.1). Toutefois, sous certaines conditions sur ν (telle que la positivité au sens de la définition 2.1.9), il y a effectivement équivalence entre la propriété **(SPPV)** concernant les singletons $\{x\}$, avec x dans S, et la propriété **(ML)** concernant tout sous-ensemble fini V de S . Dans certaines références cette propriété **(SPPV)** est appelée propriété de Markov locale et la propriété **(ML)** est alors dite propriété de Markov globale.

Comme pour **(MG)** et **(ML)** le conditionnement par $\mathcal{F}_{S\setminus\{x\}}$ dans $M(\{x\})$ peut être remplacé par une succession de conditionnements par des tribus du type $\mathcal{F}_{W\setminus\{x\}}$, où W est fini. Ceci en vertu de la proposition 2.2.3 appliquée à $V = \{x\}$. La propriété $M(\{x\})$ permet de factoriser les probabilités marginales d'un **(SPPV)** en faisant apparaître les probabilités conditionnelles $\nu(\eta(x) \mid \eta^{N(x)})$ en général spécifiées dans le modèle. Il est aussi possible de considérer un sous-ensemble "stable" de sites ne contenant pas de sites voisins. Il vient une factorisation qui sépare des sites non voisins. Rappelons que $\overline{V}$ représente $V \cup N(V)$.

Proposition 2.2.6 *Soit ν un* **(SPPV)** *, ses probabilités marginales se factorisent comme suit. Soit V un sous-ensemble fini de S,*

$$\forall\, x \in S,\ \overline{x} \subset V, \quad \nu(\eta^V) \;=\; \nu(\eta^{V\setminus\{x\}})\ \nu(\eta(x) \mid \eta^{N(x)}) \quad . \tag{2.17}$$

Soit $I = \{x_1, \ldots, x_k\}$ un sous-ensemble stable de G tel que V contienne $\overline{I}$. Nous avons

$$\nu(\eta^V) \;=\; \nu(\eta^{V\setminus I}) \prod_{i=1}^{k} \nu(\eta(x_i) \mid \eta^{N(x_i)}) \quad . \tag{2.18}$$

Ce résultat n'est pas particulier aux **(SPPV)** , mais aux propriétés $M(\{x\})$. Il est donc encore valable lorsque l'on a **(MG)** ou **(ML)** . La possibilité de factoriser les probabilités marginales est importante. En pratique, c'est ce qui permet les calculs. La définition suivante est encore fondée sur la possibilité de factoriser. Elle est issue de Suomela [50], définition 2.10 p. 17.

2.2.5 Systèmes de cliques (SC)

Un sous-graphe complet d'un graphe G est un sous-graphe constitué de sommets deux à deux voisins. Une clique est un sous-graphe complet maximal. Nous qualifierons encore de complet (resp. clique) un sous-ensemble de S qui induit un sous-graphe complet (resp. une clique) de G . Nous noterons $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble des sous-ensembles de S qui sont des cliques.

Définition 2.2.6 *Une mesure de probabilité ν sur $(X, \mathcal{F})$ est un système de cliques sur un graphe G si pour tout sous-ensemble fini V de S, il existe une fonction Q_0^V et une famille $Q^V = \{Q_C^V\}_{C\in\mathcal{C}(G)}$ de fonctions (pouvant dépendre de V) de X_C dans $\mathbb{R}^+$ telles que la factorisation suivante soit vraie,*

$$\nu(\eta^{\overline{V}}) \;=\; Q_0^V(\eta^{N(V)}) \prod_{C\in\mathcal{C}(G),\, C\subset\overline{V}} Q_C^V(\eta^C) \quad . \tag{2.19}$$

Pour un système de cliques nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire de vérifier l'égalité (2.19) pour tout sous-ensemble V fini. La définition suivante est donnée dans [26], chap. 1 p. 17.

Définition 2.2.7 *Un sous-ensemble $\mathcal{P}_o$ de $\mathcal{P}_f(S)$ est dit cofinal si pour tout élément V de $\mathcal{P}_f(S)$ il existe un élément W de $\mathcal{P}_o$ qui contient V.*

Par exemple, si $S = \mathbb{Z}^d$ l'ensemble des cubes $\mathcal{P}_o = \{ \, [-n,n]^d \cap S \ , \ n \geq 1 \, \}$ est cofinal.

Proposition 2.2.7 *Soit $\mathcal{P}_o$ un sous-ensemble cofinal de $\mathcal{P}_f(S)$. La mesure de probabilité ν est un système de cliques sur le graphe G si pour tout sous-ensemble W de $\mathcal{P}_o$ il existe une fonction Q_0^W et une famille de fonctions $Q^W = \{Q_C^W\}_{C\in\mathcal{C}(G)}$ telles que l'on ait la factorisation,*

$$\nu(\eta^{\overline{W}}) \quad = \quad Q_0^W(\eta^{N(W)}) \prod_{C\in\mathcal{C}(G), C\subset\overline{W}} Q_C^W(\eta^C) \quad . \tag{2.20}$$

Démonstration. Dans la suite, pour $Q = \{Q_C\}_{C\in\mathcal{C}(G)}$ une famille de fonctions Q_C de X_C dans $\mathbb{R}^+$ et V un sous-ensemble fini de S, nous notons pour simplifier

$$\mu_{Q,V}(\eta^{N(V)}, \eta^V) \quad = \quad \prod_{C\in\mathcal{C}(G), C\subset\overline{V}} Q_C(\eta^C) \quad .$$

Pour montrer le résultat il suffit de vérifier que lorsque $\nu(\eta^{\overline{W}})$ admet une factorisation de type (2.19) alors pour tout sous-ensemble V de W, $\nu(\eta^{\overline{V}})$ admet aussi une factorisation de type (2.19). Or pour V inclus dans W, il existe une fonction $h_{\overline{W},V}$ de $X_{\overline{W}\setminus V}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\mu_{Q^W,W}(\eta^{N(W)}, \eta^W) \quad = \quad h_{\overline{W},V}(\eta^{\overline{W}\setminus V}) \, \mu_{Q^W,V}(\eta^{N(V)}, \eta^V) \quad .$$

En effet, on peut poser

$$h_{\overline{W},V}(\eta^{\overline{W}\setminus V}) \quad = \quad \prod_{C\in\mathcal{C}(G), C\subset\overline{W}, C\not\subset\overline{V}} Q_C^W(\eta^C)$$

car

$$x \in C \not\subset \overline{V} \quad \Rightarrow \quad x \notin V$$

et le produit ci-dessus ne dépend que des valeurs $\eta(x)$ pour x dans $\overline{W}\setminus V$. Soit γ un élément de $X_{\overline{W}\setminus\overline{V}}$. Notons $\eta^{\overline{V}}\gamma$ la configuration sur $\overline{W}$ égale à $\eta^{\overline{V}}$ sur $\overline{V}$ et à γ sur $\overline{W}\setminus\overline{V}$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\nu(\eta^{\overline{V}}) \quad &= \quad \sum_{\gamma\in X_{\overline{W}\setminus\overline{V}}} \nu(\eta^{\overline{V}}\gamma) \\
&= \quad \mu_{Q^W,V}(\eta^{N(V)}, \eta^V) \sum_{\gamma\in X_{\overline{W}\setminus\overline{V}}} Q_0^W(\eta^{N(W)\cap\overline{V}}\gamma^{N(W)\setminus\overline{V}}) \;\; h_{\overline{W},V}(\eta^{N(V)}\gamma^{\overline{W}\setminus\overline{V}}) \, .
\end{aligned}$$

Dans le terme Q_0^W la configuration η n'intervient que pour les sites de $N(W)\cap\overline{V}$, qui est inclus dans $N(V)$ si V est inclus dans W. Finalement, la somme dans l'expression ci-dessus ne dépend que des valeurs $\eta(x)$ pour x dans $N(V)$. Nous avons donc bien une factorisation de type (2.19) pour V avec $Q^V = Q^W$. Notons que si S est fini, les fonctions Q_0^V et Q_C^V sont en fait indépendantes de V.

■

Nous pouvons encore donner d'autres formulations pour un système de cliques (Suomela [50] lemme 2.11 p. 17).

Proposition 2.2.8 *Les trois assertions suivantes sont équivalentes*

(i) ν *est un* **(SC)** .

(ii) Pour tout V, W *finis tels que* W *contient* $\overline{V}$ *il existe une fonction* Q_0^V *et une famille de fonctions* Q^V *telles que*

$$\nu(\eta^V \mid \eta^{W\setminus V}) \quad = \quad Q_0^V(\eta^{N(V)})\, \mu_{Q^V,V}(\eta^{N(V)}, \eta^V) \quad \nu - p.s. \tag{2.21}$$

(iii) Pour tout V *fini, il existe une fonction* Q_0^V *et une famille de fonctions* Q^V *telles que*

$$\nu(\eta^V \mid \eta^{S\setminus V}) \quad = \quad Q_0^V(\eta^{N(V)})\, \mu_{Q^V,V}(\eta^{N(V)}, \eta^V) \quad \nu - p.s. \tag{2.22}$$

Si S est fini, il suffit de vérifier (2.19), (2.21) ou (2.22) pour V égal à S, de sorte que le terme Q_0^V peut être oubliés dans les trois égalités ci-dessus. De plus, les fonctions Q_0^V, Q_C^V peuvent être prises indépendantes de V .
L'équation (2.22) montre qu'un système de cliques est un champ de Markov car $\nu(\eta^V \mid \eta^{S\setminus V})$ est $\mathcal{F}_{N(V)}$-mesurable. Si S est infini, considérons à présent des systèmes de cliques particuliers pour lesquels il existe une famille de fonctions $Q = \{Q_C\}_{C\in\mathcal{C}(G)}$ telle que la factorisation (2.19) soit vraie pour tout sous-ensemble V fini. Dans ce cas, les termes Q_C dans la factorisation (2.19) ne dépendent pas de V . Nous parlerons alors de systèmes de cliques avec fonction d'interaction $Q = \{Q_C\}_{C\in\mathcal{C}(G)}$ par analogie au cas des arbres traité dans [57]. En effet, si de plus le graphe d'interactions est un arbre, les propositions 2.2.7 et 2.2.8 sont contenues dans le lemme 3.1 de Zachary [57]. Dans ce cas, les cliques sont les arêtes $\{x,y\}$ de E et si ν est un système de cliques pour une fonction $Q = \{Q_{\{x,y\}}\}_{\{x,y\}\in E}$, Q définit une fonction d'interaction au sens de [57] p. 896. En effet, on pose (se reporter à [57] pour les notations) $\Phi_{\{x,y\}} = Q_{\{x,y\}}$ et pour tout V fini inclus dans S,

$$\mu_{\Phi,V}(\eta^{N(V)}, \eta^V) = \prod_{\{x,y\}\cap V\neq\emptyset} Q_{\{x,y\}}(\eta^{\{x,y\}}) \quad .$$

Pour ν système de cliques, la stricte positivité de $\nu(\eta^{N(V)})$ implique celle de $Q_0(\eta^{N(V)})$ et

$$\sum_{\eta^V\in X_V} \mu_{\Phi,V}(\eta^{N(V)}, \eta^V) = \frac{\nu(\eta^{N(V)})}{Q_0(\eta^{N(V)})} \quad .$$

Cette somme est donc strictement positive, finie et Q vérifie l'hypothèse (3.1) requise dans [57] pour être une fonction d'interaction. Il faut encore noter que deux fonctions d'interaction peuvent définir le même système de cliques.

Sur un arbre les seules cliques sont les paires constituées des extrémités d'une même arête. Une chaîne de Markov sur un arbre est un cas particulier de système de cliques. La matrice de transition de la chaîne est une fonction d'interaction convenable. Inversement dans la partie 2.3.4 (proposition 2.3.13) nous donnons une condition suffisante pour qu'un système de cliques sur un arbre soit une chaîne.

D'autres cas particuliers de systèmes de cliques sont les mesures de Gibbs avec potentiel de plus proches voisins. Ces dernières sont des systèmes de cliques positifs (au sens de la définition 2.1.9) avec une fonction d'interaction Q donnée par le potentiel comme cela apparaît dans la section suivante. D'autre part, un système de cliques positif est un champ de Markov positif, c'est-à-dire une mesure de Gibbs de plus proches voisins (par un théorème d'équivalence classique qui se trouve par exemple dans Preston [42] théorème 4.1 p. 27). Ainsi tout système de cliques positif est un système de cliques avec fonction d'interaction. En fait, nous montrerons (voir proposition 2.3.12) qu'un système de cliques vérifiant une condition "w_o" plus faible que la positivité est un système de cliques avec fonction d'interaction.

2.2.6 Mesures de Gibbs de plus proches voisins (G)

Rappelons que nous considérons S comme l'ensemble des sommets d'un graphe localement fini. Dans ce cas, appelons potentiel (voir définition (2.2) p.27 dans [26]) une famille $\phi = \{\phi_V\}_{V \in \mathcal{P}_f(S)}$ de fonctions ϕ_V de X_V dans $I\!R$. Un potentiel est dit de plus proches voisins si $\phi_V = 0$ sauf si V est un sous-ensemble complet de S.

Définition 2.2.8 *Une mesure de probabilité ν sur $(X, \mathcal{F})$ est une mesure de Gibbs de plus proches voisins s'il existe un potentiel de plus proches voisins ϕ tel que,*

$$\forall V \in \mathcal{P}_f(S), \quad \nu(\eta^V \mid \eta^{S \setminus V}) \;=\; Z^{-1} exp\left[\sum_{W \in \mathcal{P}_f(S), W \cap V \neq \emptyset} \phi_W(\eta^W)\right] \quad \nu - p.s.$$

où Z est une constante de normalisation.

Dans la partie 5.1 nous utilisons le terme mesure de Gibbs de manière plus générale comme dans [26]. Dans cette partie ce terme fera toujours référence à la définition ci-dessus.

Un résultat classique est l'équivalence entre mesures de Gibbs de plus proches voisins et champs de Markov positifs (voir par exemple Preston [42] théorème 4.1 p. 27). Comme déjà mentionné, beaucoup des propriétés de Markov présentées sont équivalentes si l'on suppose la positivité des mesures. Qu'en est-il lorsque l'on abandonne cette condition ? Une condition plus faible sous laquelle la plupart des équivalences restent vraies est la condition "w_o" introduite par Suomela.

2.2.7 Probabilités non strictement positives

La définition d'une probabilité positive a été donnée dans la définition 2.1.9. Une condition plus faible est donnée dans [50] définition 2.2 p. 12.

Définition 2.2.9 *Une probabilité ν vérifie la condition "w_o" s'il existe une configuration de référence w_o dans X telle que pour tout V fini inclus dans S, pour tout η dans X,*

$$\nu(\eta^V) > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, W \subset V \quad \nu(\eta^W w_o^{V \backslash W}) > 0 \tag{2.23}$$

où $\eta^W w_o^{V\backslash W}$ est la configuration égale à η sur W et à w_o sur $V\backslash W$.

Si ν est positive, toutes les configurations de X peuvent être configuration de référence. Un exemple de mesure non positive vérifiant "w_o" est la mesure réversible du processus des philosophes. La configuration de référence est la configuration nulle où aucun philosophe ne mange. Plus généralement, Suomela justifie cette condition dans le cadre de modèles écologiques. Dans ces modèles il y a souvent une situation qui représente le "pire" des cas possibles. Ce pire des cas est la configuration "w_o" de référence. Pour le processus des philosophes la configuration nulle représente la plus mauvaise situation puisqu'aucun philosophe ne mange. La condition "w_o" est satisfaite si pour toute configuration possible (de probabilité strictement positive) du système, toutes les configurations moins bonnes sont aussi possibles, c'est-à-dire de probabilité strictement positive. On peut remplacer dans ce qui précède "pire" par "meilleure".

Un autre intérêt de la condition "w_o" est, d'après Suomela, qu'elle serait la condition la plus faible sous laquelle on peut utiliser la formule d'inversion de Möbius. Cette formule est très utile pour montrer des équivalences entre propriétés de Markov. Nous en verrons une application dans la partie 2.3.4 avec la démonstration de la proposition 2.3.11. Le principe d'inversion de Möbius pour des ensembles partiellement ordonnés est une généralisation du principe d'inclusion-exclusion et une extension de l'inversion de la fonction de Möbius classique, en théorie des nombres. On pourra se reporter au chapitre 25 de [52] pour plus de détails. Nous présentons ce procédé avec une terminologie empruntée à Kelly et Ripley [30]. Ces auteurs définissent une condition analogue à "w_o" mais utilisée dans le cadre des processus ponctuels markoviens. Ils définissent la notion de fonction "héréditaire" ([30] p. 188) que nous rappelons ci-dessous. Soit $\mathcal{P}(S)$ l'ensemble des parties de S .

Définition 2.2.10 *Une fonction f de $\mathcal{P}(S)$ dans $I\!R^+$ est dite héréditaire si*

$$\forall\, V \subset S, \quad f(V) > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, W \subset V \quad f(W) > 0 \quad .$$

L'utilisation de telles fonctions est simplifiée du fait que l'on ne considère que deux états $B = \{0, 1\}$. La configuration de référence correspondante est la configuration nulle. Dans la section 2.3.4 on utilisera le principe d'inversion pour une fonction héréditaire particulière.

Soit O un ensemble fini admettant un ordre partiel $\leq$. L'algèbre d'incidence $\mathcal{I}(O)$ est l'ensemble des matrices, indicées par les éléments de O, dont le coefficient d'ordre (i, j) est nul sauf si $i \leq j$ dans O, *i.e.* si $i > j$ ou i et j sont non comparables. L'ensemble $\mathcal{I}(O)$ est stable par multiplication, addition et multiplication par un scalaire, ce qui justifie le terme algèbre. Un élément particulier de $\mathcal{I}(O)$ joue un rôle important. C'est la fonction définie par

$$\zeta(i,j) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \leq j \quad \text{dans } O \\ 0 & \text{sinon} \quad . \end{cases}$$

On peut montrer que ζ est inversible. Son inverse appartient à $\mathcal{I}(O)$. Elle est appelée fonction de Möbius de O et est notée μ . Des propriétés de la fonction μ peuvent se déduire des égalités matricielles $\zeta\mu = Id$ et $\mu\zeta = Id$. Nous nous contentons de signaler que le théorème 25.1 p. 300 dans [52] donne des exemples de fonctions de Möbius μ pour des ensembles partiellement ordonnés classiques. Le cas qui nous intéresse est celui de l'ensemble des parties d'un ensemble V fini. L'ensemble $O = \mathcal{P}(V)$ est partiellement ordonné par l'inclusion et sa fonction de Möbius est donnée par

$$\mu(U,W) = \begin{cases} (-1)^{|W|-|U|} & \text{si} \quad U \subset W \subset V \\ 0 & \text{sinon} \quad . \end{cases}$$

Le principe de l'inversion de Möbius est exposé dans [52]. Une démonstration du lemme d'inversion de Möbius est également donnée dans [27] p. 89. Nous en donnons une version particulière au cas qui nous intéresse en utilisant la notion de fonction héréditaire.

Proposition 2.2.9 *Soit f une fonction de $\mathcal{P}(V)$ dans $\mathbb{R}^+$ héréditaire telle que $f(V)$ est strictement positif. On peut définir une fonction g de $\mathcal{P}(V)$ dans $\mathbb{R}^+$ par*

$$\forall W \subset V\ , \quad g(W) = \prod_{U \subset W} f(U)^{(-1)^{|W \setminus U|}} \quad .$$

Les fonctions f et g vérifient alors

$$\forall W \subset V\ , \quad f(W) = \prod_{U \subset W} g(U) \quad .$$

Démonstration. Soit V un ensemble fini et $\mathcal{P}(V)$ l'ensemble des parties de V partiellement ordonné par l'inclusion. Soit f une fonction de $\mathcal{P}(V)$ dans $\mathbb{R}^+$ héréditaire. Si $f(V)$ est strictement positif, alors par hérédité $f(W)$ est strictement positif pour tout W inclus dans V . Pour tout W inclus dans V on peut donc définir une fonction g de $\mathcal{P}(V)$ dans $\mathbb{R}^+$ en posant

$$g(W) = \prod_{U \subset W} f(U)^{(-1)^{|W \setminus U|}}$$

soit encore

$$\begin{aligned} \log g(W) &= \sum_{U \subset W} (-1)^{|W \setminus U|} \log f(U) \\ &= \sum_{U \subset W} \mu(U,W) \log f(U) \end{aligned}$$

soit en écriture matricielle

$$[\ \log g(\emptyset), \ldots, \log g(V)\ ] = [\ \log f(\emptyset), \ldots, \log f(V)\ ] \cdot \mu \quad .$$

D'où en inversant la matrice μ, il vient pour tout W inclus dans V

$$\begin{aligned} \log f(W) &= \sum_{U \in \mathcal{P}(V)} \zeta(U,W) \, \log g(U) \\ &= \sum_{U \subset W} \log g(U) \end{aligned}$$

soit

$$f(W) = \prod_{U \subset W} g(U) \quad .$$

En particulier pour $W = V$,

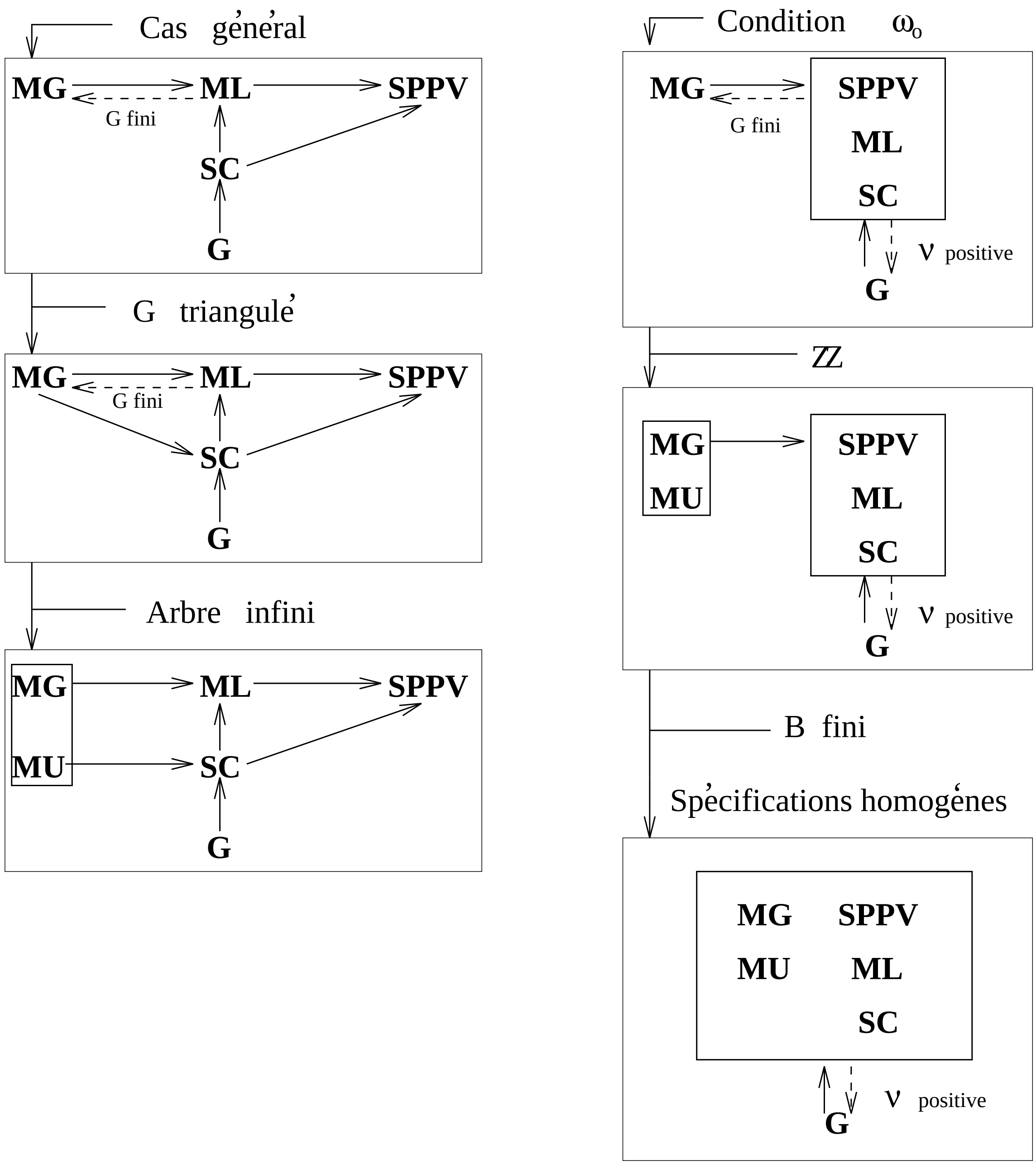
$$f(V) = \prod_{U \subset V} g(U) \quad .$$

■

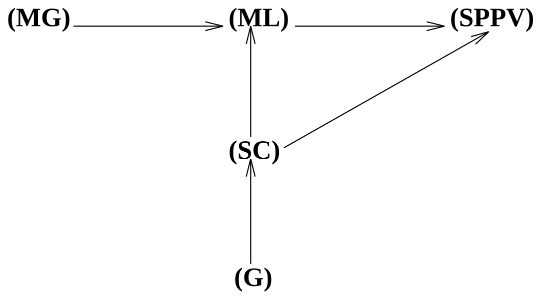
La section 2.3.4 donne un exemple d'utilisation de la proposition 2.2.9.

2.3 Relations entre les différentes propriétés de Markov

Nous résumons les relations qui existent entre les propriétés de Markov par des diagrammes. Les flèches indiquent des implications vraies. Le plus souvent l'absence de flèche indique par défaut des implications fausses que nous illustrons dans la suite de contre-exemples. Le diagramme ci-dessous résume les relations qui seront développées dans cette section. La partie gauche correspond à des hypothèses sur le graphe d'interactions de plus en plus précises. La partie droite traite le cas où ν vérifie "w_o" auquel on ajoute des hypothèses en descendant. Le deuxième diagramme de droite décrit le cas de $\mathbb{Z}$, le troisième celui de $\mathbb{Z}$ avec B fini et ν homogène.



2.3.1 Cas général



Relations

- **(SC)** $\Rightarrow$ **(ML)** .

  Ceci apparaît clairement par exemple dans l'expression (2.22) de $\mathbb{E}[\ \eta^V \mid \mathcal{F}_{S\setminus V}\ ]$ où le second membre est $\mathcal{F}_{N(V)}$-mesurable.

- Les autres implications se déduisent facilement des définitions.

Contre-exemples

- **(SC)** $\not\Rightarrow$ **(G)**

  Un système de cliques ne peut être une mesure de Gibbs que s'il est positif au sens de la définition 2.1.9.

- **(ML)** $\not\Rightarrow$ **(MG)** .

  Il existe sur $\mathbb{Z}$ de nombreux contre-exemples. Nous donnons un exemple simple de champ de Markov homogène sur $\mathbb{Z}$ qui n'est pas une chaîne. Considérons donc $S = \mathbb{Z}$ et une suite de variables aléatoires $\{w(x),\ x \in \mathbb{Z}\}$ telles que

  $$\forall\, x \in \mathbb{Z}, \quad w(x) + 3\, w(x-1) + 2\, w(x-2) = 0\ ,$$

  Une telle suite est déterminée par la connaissance de deux des variables. Notons $[k+1, m+k-1]$ l'ensemble constitué des points de $\mathbb{Z}$ de l'indice $k+1$ à l'indice $m+k-1$. La suite vérifie les propriétés bilatérales $M([k+1, m+k-1])$ pour tout k et m puisque la connaissance de $w(k)$ et $w(m+k)$ suffit à déterminer de manière unique les variables $w(k+i)$ pour i de 1 à $m-1$. En revanche, la seule connaissance de $w(k)$ ne suffirait pas, de sorte que la suite ne vérifie pas les propriétés unilatérales $M([k+1, \infty[)$. Notons qu'il y a homogénéité au sens où la probabilité conditionnelle

  $$P(\ w(x+1) = \eta(x+1) \mid w(x-1) = \eta(x-1), w(x) = \eta(x)\ )$$

  ne dépend pas de x mais seulement de η dans X . Elle vaut 1 si $\eta(x+1) + 3\,\eta(x) + 2\,\eta(x-1)$ est nul et 0 sinon. La loi de cette suite est donc un champ de Markov homogène sur $\mathbb{Z}$ mais n'est pas une chaîne. Pour une telle suite toutes les configurations sur $\mathbb{Z}$ ne sont pas possibles. Sa loi conjointe n'est pas strictement positive. Ceci est important car on peut montrer (voir par exemple Georgii, [26] théorème 3.5 p. 45) qu'un champ de Markov strictement positif, homogène, sur $\mathbb{Z}$ avec un espace d'états B fini est une chaîne de Markov. Mentionnons que pour B infini, il existe des exemples de champs de Markov positifs sur $\mathbb{Z}$ qui ne sont pas des chaînes. L'exemple de Spitzer-Cox dans [26] p. 221 en témoigne.

- **(SPPV)** $\not\Rightarrow$ **(ML)** .

  Sans hypothèse supplémentaire sur la mesure, on peut avoir la propriété de Markov $M(\{x\})$ pour tout singleton $\{x\}$, avec x dans S, sans avoir la propriété $M(V)$ pour tout sous-ensemble fini V de S . Ceci est illustré par l'exemple qui suit dû à R. Recoules

[44]. Définissons la suite $\{w(x),\ x \in \mathbb{Z}\}$ de la manière suivante. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes. Posons

$$\begin{aligned} w(x) &= Y \quad \text{si } x = 0 \text{ ou } 1 \text{ modulo } 4 \\ &= Z \quad \text{si } x = 2 \text{ ou } 3 \text{ modulo } 4 \,. \end{aligned}$$

Cette suite sur $\mathbb{Z}$ vérifie bien $M(\{x\})$ pour tout x dans $\mathbb{Z}$ mais il suffit de prendre, par exemple, $V = \{4x, 4x+1\}$ pour se rendre compte que **(ML)** n'est pas vraie.

- **(ML)** $\not\Rightarrow$ **(SC)** .

  Un exemple de champ de Markov sur un graphe fini qui n'est pas un système de cliques est donné par Suomela [50] exemple 2.13 p. 18. L'espace d'états est $B = \{0,1\}$. Le graphe G est le cycle à quatre sommets

$$\begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 \\ \bullet & - & \bullet \\ | & & | \\ \bullet & - & \bullet \\ x_4 & & x_5 \end{array}$$

  On définit

$$\nu\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \nu\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \nu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

  et $\nu(\eta)$ est nul pour toute autre configuration. La mesure ν est un champ de Markov. Pour le voir, il suffit de vérifier les propriétés $M(\{x\})$ pour x successivement égal à x_1, x_2, x_3, x_4 . Les autres sont clairement vérifiées. Pour vérifier $M(\{x_1\})$ par exemple, il suffit de vérifier que pour toute configuration η avec $\nu(\eta^{\{x_2,x_3,x_4\}})$ strictement positif,

$$\nu(w(x_1) = \eta(x_1) | w(\{x_2, x_3, x_4\}) = \eta^{\{x_2,x_3,x_4\}}) \quad = \quad \nu(w(x_1) = \eta(x_1) | w(\{x_2, x_4\}) = \eta^{\{x_2,x_4\}}).$$

  Ce dernier point est facilement vérifié. D'autre part les cliques de G sont les ensembles $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_4, x_1\}$. Si ν est un système de cliques sur G, elle admet une factorisation sur les cliques de G du type $Q_{x_1x_2}Q_{x_2x_3}Q_{x_3x_4}Q_{x_4x_1}$. La positivité des trois configurations ci-dessus donne alors la positivité de $Q_{xy}(\{0,0\})$ pour toute clique $\{x, y\}$ de G . Il en découle que la configuration $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ a aussi une probabilité positive, ce qui contredit la définition de ν .

- **(MG)** $\not\Rightarrow$ **(SC)** .

  Pour un graphe fini, **(MG)** et **(ML)** sont équivalentes. Si **(MG)** impliquait **(SC)** , pour des graphes finis **(ML)** impliquerait **(SC)** . Ce qui n'est pas vérifié. Ceci n'est pas contradictoire avec le fait qu'une chaîne de Markov est un système de cliques particulier. Nous verrons que **(MG)** implique **(SC)** dès que le graphe d'interactions est triangulé. Les arbres sont des cas particuliers de graphes triangulés.

- **(SC)** $\not\Rightarrow$ **(MG)** .

  Un système de cliques positif est une mesure de Gibbs et un champ de Markov. Si l'implication ci-dessus était vraie, tout champ positif vérifierait aussi **(MG)** . Nous avons déjà vu que ceci était faux.

– **(SPPV)** $\not\Rightarrow$ **(SC)** .

Découle de **(ML)** $\Rightarrow$ **(SPPV)** et **(ML)** $\not\Rightarrow$ **(SC)** .

2.3.2 G triangulé

Nous précisons le cas général en nous restreignant à une classe particulière de graphes d'interactions. Il s'agit des graphes triangulés dont une définition se trouve dans [4] p. 356. Les propositions qui suivent précisent la structure des graphes triangulés. Nous utilisons des résultats énoncés dans [12]. Dans cet article les graphes sont supposés finis. Pour les résultats que nous utilisons pour des graphes éventuellement infinis, les démonstrations restent cependant les mêmes.

Définition et propriétés

Définition 2.3.1 *Un graphe G est triangulé si tout cycle de longueur strictement supérieure à 3 admet une corde, c'est-à-dire une arête reliant deux sommets non consécutifs du cycle.*

La propriété de graphe triangulé se conserve par passage aux sous-graphes ([4] p. 356).

Proposition 2.3.1 *Si G est triangulé, tout sous-graphe de G est triangulé.*

La proposition 2.3.2 démontrée dans [4] théorème 9 p. 357, fait intervenir la notion d'ensemble d'articulation d'un graphe connexe ([4] p. 8).

Définition 2.3.2 *Soit $G = (S, E)$ un graphe connexe. Un sous-ensemble de sommets J est un ensemble d'articulation de G si $G_{S\setminus J}$ n'est plus connexe. De plus, J est un ensemble d'articulation minimal si aucun des sous-ensembles propres de J n'est un ensemble d'articulation.*

Proposition 2.3.2 *Si G est triangulé tout ensemble d'articulation minimal est complet.*

La proposition 2.3.3 utilise la notion de graphe repliable sur un sous-ensemble de ses sommets. Le terme “repliable” nous est propre et n'est pas courant en théorie des graphes. Il se veut une traduction de la notion de “collapsibility” introduite par Asmussen et Edwards dans [1] dans le cadre des tableaux de contingence en statistique. La définition que nous donnons est celle de [12] définition A.5 p. 1312.

Définition 2.3.3 *Soit $G = (S, E)$ un graphe. Soit Λ inclus dans S . Le graphe G est dit repliable sur Λ si toute composante connexe Δ de $G_{S\setminus\Lambda}$ a un voisinage $N(\Delta)$ complet dans G .*

Rappelons que par abus de langage nous qualifions de connexe un sous-ensemble de sommets Λ qui engendre un sous-graphe connexe G_Λ . Remarquons que si G est un arbre, G est repliable sur tout Λ connexe. L'absence de cycles dans un arbre implique que pour toute composante connexe Δ de $G_{S\setminus\Lambda}$, $N(\Delta)$ est réduit à un point. Il est donc complet. Pour un graphe triangulé les ensembles sur lesquels il est repliable se caractérisent simplement.

Proposition 2.3.3 *Soit G triangulé connexe. Pour tout sous-ensemble de sommets Λ connexe d'intérieur non vide, G est repliable sur Λ .*

Démonstration. Soit Λ connexe d'intérieur non vide et Δ une composante connexe de $G_{S\backslash\Lambda}$. L'ensemble $N(\Delta)$ est inclus dans $\partial\Lambda$. Pour Λ d'intérieur non vide, nous en déduisons que $N(\Delta)$ est strictement inclus dans Λ . Donc $N(\Delta)$ sépare les deux ensembles non vides Δ et $\Lambda\backslash N(\Delta)$ dans $G_{\Lambda\cup\Delta}$ et $N(\Delta)$ est un ensemble d'articulation de $G_{\Lambda\cup\Delta}$. De plus $N(\Delta)$ est minimal dans $G_{\Lambda\cup\Delta}$ car pour tout x dans $N(\Delta)$, le graphe engendré par $\Delta\cup\Lambda\cup\{x\}$ est connexe. Ainsi $N(\Delta)$ est un ensemble d'articulation minimal dans $G_{\Lambda\cup\Delta}$ qui est triangulé par la proposition 2.3.1. Par la proposition 2.3.2, $N(\Delta)$ est alors complet dans $G_{\Lambda\cup\Delta}$ et donc dans G .

■

On trouve facilement des exemples de graphes triangulés non repliables sur Λ connexe d'intérieur vide. Nous précisons en quoi la notion de graphe repliable est intéressante.

Graphes repliables et propriétés de Markov sur des marginales

La proposition 2.3.5 caractérise les sous-ensembles de sommets Λ pour lesquels la propriété suivante est vraie : si ν est une mesure de probabilité vérifiant la propriété de Markov **(MG)** sur G alors la probabilité marginale de ν sur Λ notée ν_Λ vérifie la propriété **(MG)** sur G_Λ . Ceci n'est pas toujours le cas car le passage au sous-graphe G_Λ ne conserve généralement pas les voisinages. L'utilité de la notion de graphe repliable apparaît dans la proposition 2.3.4 ([12] lemme A.6 p. 1312).

Proposition 2.3.4 *Le graphe G est repliable sur Λ si et seulement si pour tout triplet (U,V,W) de sous-ensembles de Λ,*

$$U \textit{ sépare } V \textit{ et } W \textit{ dans } G_\Lambda \;\Rightarrow\; U \textit{ sépare } V \textit{ et } W \textit{ dans } G$$

Finalement il vient ([12] proposition B.5 p. 1315) la proposition suivante

Proposition 2.3.5 *Soit $G=(S,E)$ repliable sur Λ inclus dans S . Soit ν une mesure de probabilité vérifiant la propriété de Markov* **(MG)** *sur G . La probabilité marginale ν_Λ vérifie* **(MG)** *sur G_Λ .*

Démonstration. Ceci vient de la proposition 2.3.4 et de la caractérisation 2.2.2 de **(MG)** en termes d'indépendance conditionnelle. Cette caractérisation est par ailleurs mentionnée dans [12], théorème 2.8 p. 1279.

■

Nous donnons quelques propriétés suplémentaires des graphes triangulés qui n'ont de sens que pour des graphes finis.

Graphes triangulés finis

Définition 2.3.4 *Soit G un graphe non orienté d'ordre m . Soit $\# = [x_1,\dots,x_m]$ une numérotation de ses sommets. Pour i de 1 à m, soit $H_i=\{x_1,\dots,x_i\}$ et pour i de 2 à m, $J_i = N(x_i)\cap H_{i-1}$. La numérotation $\#$ est dite parfaite si pour tout i de 2 à m, J_i est complet. Alors x_i est encore dit simplicial dans G_{H_i} .*

Une numérotation $\#$ peut être vue comme une bijection de l'ensemble des sommets du graphe dans $\{1,\ldots,m\}$. De sorte que nous noterons $\#(x)$ (resp. $\#^{-1}(k)$) le numéro du sommet x (resp. le sommet de numéro k) dans la numérotation $\#$.

Les propositions 2.3.6 et 2.3.7 sont énoncées dans [12] sous une forme équivalente (proposition A.4 p. 1311 et lemme A.7 p. 1312).

Proposition 2.3.6 *Les assertions ci-dessous sont équivalentes.*

(i) G est triangulé fini.

(ii) G admet une numérotation parfaite.

Proposition 2.3.7 *Si G admet une numérotation parfaite $\# = [x_1, \ldots x_m]$ alors pour tout i de 1 à m, G est repliable sur H_i avec $H_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$.*

Démonstration. Ce résultat découle du théorème 3.3 p. 576 dans [1] dont la démonstration se situe dans le cadre statistique des tableaux de contingence. Nous donnons ici notre propre démonstration de la proposition. Elle utilise la propriété suivante.

Lemme 2.3.1 *Soit G admettant une numérotation parfaite $\#$. Soit x et y deux sommets de G tels que $\#(x) = k$ et $\#(y) = l$. S'il existe un chemin de x à y passant par un sommet z tel que $\#(z)$ est strictement plus grand que $max(l,k)$ alors x et y sont voisins dans G .*

Démonstration du lemme. Notons σ le plus court chemin de x à y passant par un sommet z tel que $\#(z) > max(l,k)$. Le chemin est nécessairement de longueur supérieure ou égale à 2 et nous pouvons poser $\sigma = (s_1, \ldots, s_p)$ avec $p \geq 3$, $s_i \in S$, $s_1 = x$ et $s_p = y$. Soit s_k le sommet de σ de plus grand numéro. Par hypothèse k est dans $\{2, \ldots, p-1\}$ et les sommets s_{k-1} et s_{k+1} sont dans $N(s_k) \cap H_{\#(s_k)-1}$ qui est complet puisque $\#$ est parfaite. Ainsi s_{k-1} et s_{k+1} sont voisins dans G . De plus $s_{k-1} = s_1 = x$ et $s_{k+1} = s_p = y$ sinon σ ne serait pas minimal. D'où p est égal à 3 et x et y sont voisins dans G .

■

La démonstration de la proposition 2.3.7 se termine comme suit. Soit Δ une composante connexe de $G_{S\backslash H_i}$. Le voisinage $N(\Delta)$ est inclus dans H_i et pour x et y dans $N(\Delta)$ les numéros $\#(x)$ et $\#(y)$ sont inférieurs ou égaux à i . D'autre part, puisque Δ est connexe et x et y appartiennent à $N(\Delta)$, il existe un chemin de x à y passant par z dans Δ . Or pour tout z dans Δ, $\#(z)$ est strictement plus grand que i . Nous déduisons du lemme précédent que x et y sont voisins et $N(\Delta)$ est complet.

■

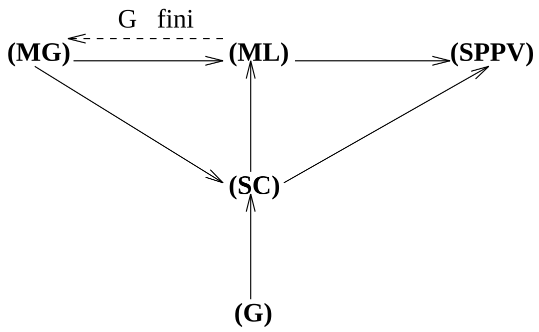
Une conséquence utile de la proposition 2.3.7 est le corollaire A.8 p. 1312 dans [12] que nous énonçons.

Proposition 2.3.8 *Soit G triangulé fini et $\# = [x_1, \ldots, x_m]$ une numérotation parfaite. Pour tout i de 2 à m, l'ensemble $J_i = N(x_i) \cap H_{i-1}$ sépare $H_{i-1}\backslash J_i$ et $\{x_i\}$ dans G .*

Démonstration. L'ensemble J_i sépare $H_{i-1}\backslash J_i$ et $\{x_i\}$ dans H_i . La proposition en découle grâce aux résultats 2.3.7 et 2.3.4.

■

Nous disposons à présent de tous les résultats nécessaires pour étudier les relations entre propriétés de Markov dans le cas des graphes triangulés. Le diagramme qui correspond à ce cas est le suivant.



Relations

Par rapport au cas général, nous avons ajouté l'implication **(MG)** $\Rightarrow$ **(SC)** . Nous commençons par montrer cette implication pour des graphes triangulés finis.

– **(MG)** $\Rightarrow$ **(SC)** pour G triangulé fini.

  Il suffit d'obtenir une factorisation de $\nu(\eta^S)$ du type (2.19). Soit $\# = [x_1, \ldots, x_m]$ une numérotation parfaite de G . L'ensemble S est H_m . D'après la proposition 2.3.8 pour tout i de 2 à m, J_i sépare $\{x_i\}$ de $H_{i-1}\backslash J_i$ dans G . Nous avons

$$\begin{aligned} \nu(\eta^S) &= \nu(\eta(x_m) \mid \eta^{H_{m-1}}) \quad \nu(\eta^{H_{m-1}}) \\ &= \nu(\eta(x_m) \mid \eta^{J_m}) \quad \nu(\eta^{H_{m-1}}) \quad . \end{aligned}$$

  La dernière ligne est obtenue à l'aide de la proposition 2.2.2 car ν vérifie **(MG)** et J_m sépare $\{x_m\}$ et $H_{m-1}\backslash J_m$ dans G . En réitérant ce procédé il vient

$$\nu(\eta^S) = \nu(\eta(x_1)) \prod_{i=2}^{m} \nu(\eta(x_i) \mid \eta^{J_i}) \quad .$$

  Or $\{x_i\} \cup J_i$ est complet et $\nu(\eta^S)$ admet bien la factorisation souhaitée. Le même résultat pour G triangulé infini s'obtient alors facilement de la manière suivante.

– **(MG)** $\Rightarrow$ **(SC)** .

  Soit ν une mesure de probabilité vérifiant **(MG)** et G un graphe triangulé infini. Nous pouvons supposer G connexe en travaillant si besoin sur chaque composante connexe. D'après la proposition 2.2.7 il suffit de trouver un ensemble cofinal $\mathcal{P}_o$ tel que l'on ait une factorisation de type (2.20) pour tout W dans $\mathcal{P}_o$. Un ensemble convenable est constitué des sous-ensembles $S_n,\ n \in \mathbb{N}$, obtenus comme suit. Soit x un sommet quelconque de G . On pose

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & \{x\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} & = & S_n \cup N(S_n) \ . \end{array}$$

Pour $n > 1$, chaque S_n est connexe fini et d'intérieur non vide par construction. D'après la proposition 2.3.3 le graphe G est donc repliable sur chaque S_n . Notons ν_n la probabilité marginale de ν sur S_n et G_n le sous-graphe engendré par S_n . La proposition 2.3.5 implique que pour tout n, ν_n vérifie **(MG)** sur G_n fini. Ainsi ν_n vérifie **(SC)** sur G_n et $\nu(\eta^{S_n})$ admet une factorisation sur des graphes complets de G_n qui est bien du type (2.20).

Contre-exemples

- **(ML)** $\not\Rightarrow$ **(SC)** .

  Le contre-exemple du cas général 2.3.1 donné par Suomela ne suffit plus car le graphe considéré n'est pas triangulé. Sur le même principe, nous construisons donc l'exemple suivant sur $S = \mathbb{Z}$ avec $B = \{0, 1, 2\}$. Soit ν la mesure qui attribue une probabilité de 1/3 à chacune des trois configurations ci-dessous.

...	...	...	...	$w(-1)$	$w(0)$	$w(1)$	$w(2)$	$w(3)$	...	...	...	...	...
...	1	...	...	1	2	1	0	1	1	...	...	1	...
...	0	...	...	0	0	0	0	0	0	...	...	0	...
...	2	...	...	2	1	0	1	1	2	...	...	2	...

Il s'agit bien d'un champ de Markov. Pour tout sous-ensemble V fini de $\mathbb{Z}$, le voisinage $N(V)$ comprend au moins deux sites. Les configurations de probabilité positives ci-dessus sont construites de telle sorte que lorsque les valeurs de deux sites sont connues, nous savons dans quelle configuration nous nous trouvons et nous n'en savons pas plus si les valeurs de tous les sites à l'exterieur de V sont connues. D'autre part, ν n'est pas un système de cliques. Si c'était le cas nous aurions

$$\nu(w(0) = 1, w(1) = 0, w(2) = 0, w(3) = 1) = Q_{0,3}(1,1)\ Q_{0,1}(1,0)\ Q_{1,2}(0,0)\ Q_{2,3}(0,1)\ .$$

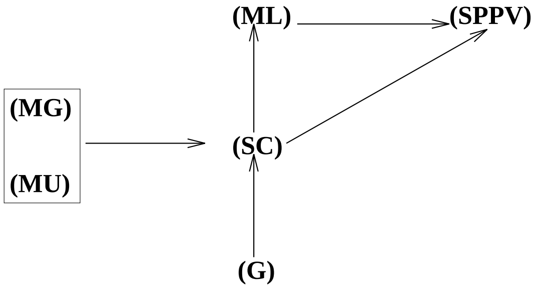
La notation $Q_{x,y}(\eta(x), \eta(y))$ représente le terme $Q_C(\eta^C)$ dans (2.19) pour $C = \{x, y\}$. Or la première des configurations ci-dessus est de probabilité positive. Nous en déduisons que la quantité $Q_{2,3}(0,1)$ est strictement positive . La deuxième donne la stricte positivité de $Q_{1,2}(0,0)$ et la troisième celle de $Q_{0,1}(1,0)$ et de $Q_{0,3}(1,1)$. D'où

$$\nu(\ w(0) = 1, w(1) = 0, w(2) = 0, w(3) = 1\ ) > 0 \quad .$$

Ce qui est contradictoire avec la construction de ν .

2.3.3 G connexe sans cycle (arbre)

Nous précisons ce cas particulier de graphes triangulés car nous pouvons y définir la notion de chaîne de Markov et donner un sens à la propriété unilatérale **(MU)** .



Relations.

La propriété $\mathbf{(MG)}(A)$ implique la propriété unilatérale $\mathbf{(MU)}(A)$ qui définit une chaîne de Markov sur A . Une telle chaîne est un système de cliques particulier par la proposition 2.2.5. Il est également possible de montrer directement (voir [26] remarque (6) p. 240) que $\mathbf{(MU)}(A)$ implique $\mathbf{(ML)}(A)$. En fait, nous allons montrer que $\mathbf{(MU)}(A)$ implique $\mathbf{(MG)}(A)$ c'est-à-dire que $\mathbf{(MU)}(A)$ et $\mathbf{(MG)}(A)$ sont équivalentes.

– $\mathbf{(MU)}(A) \Rightarrow \mathbf{(MG)}(A)$

Dans [12] la définition 2.2 p. 1276 et le théorème 2.8 p. 1279 énoncés pour des graphes finis, donneraient l'implication souhaitée s'ils étaient étendus aux graphes infinis. Ici, plutôt que d'étudier la possibilité de généraliser ces résultats, nous préférons donner notre propre démonstration de l'implication. Pour ce faire, nous avons besoin d'un résultat général (voir [26] p. 194-195) concernant les propriétés $M(V)$ (définies dans la définition 2.1.6).

Définition 2.3.5 *Soit $G = (S, E)$ un graphe. Soit V et W deux sous-ensembles de S . Les ensembles V et W sont dits non adjacents dans G si et seulement si*

$$V \cap (W \cup N(W)) \;=\; \emptyset \quad .$$

Proposition 2.3.9 *Soit $\{V_n\}_{n\in I\!N}$ des sous-ensembles de S non adjacents. Si pour tout n la propriété $M(V_n)$ est vérifiée alors $M(V)$ est vérifiée pour tout V union finie ou infinie d'ensembles V_n .*

Démonstration. Se reporter à [26] p. 194-195.

∎

Tout ensemble V inclus dans S (au plus dénombrable) est union de ses composantes connexes (en nombre au plus dénombrable). Ces composantes connexes sont non adjacentes. Pour vérifier la propriété **(MG)** il suffit donc de vérifier $M(V)$ pour V connexe. Une première étape dans la démonstration de l'implication est la preuve de la proposition qui suit.

Proposition 2.3.10 *Soit un arbre $A = (S, E)$ et une mesure ν vérifiant* **(MU)**(A) . *Pour tout sous-ensemble de sommets V connexe, ν vérifie $M(S \backslash V)$.*

Démonstration. Soit V connexe. Notons Δ_i les composantes connexes de $A_{S\backslash V}$. Les Δ_i sont non adjacents et leur union est $S\backslash V$. Pour tout Δ_i, il existe une unique paire de sommets x_i et y_i voisins dans A avec x_i dans V et y_i dans Δ_i . En effet, il existe un chemin entre tout point de V et tout point de Δ_i puisque A est un arbre. Il existe donc y_i dans Δ_i et x_i dans $S\backslash\Delta_i$ avec x_i et y_i voisins dans A . Pour j différent de i, x_i ne peut pas être dans Δ_j par définition des composantes connexes. Donc x_i n'est pas dans $S\backslash V$ et x_i est dans V . D'autre part une telle paire $\{x_i, y_i\}$ est unique. Si ce n'était pas le cas, il y aurait un cycle dans le graphe car V et Δ_i sont connexes. Ce qui est impossible dans un arbre. Ainsi Δ_i est l'ensemble $]x_i y_i, +\infty[$ des points atteignables lorsque l'on part dans la direction de x_i vers y_i . En effet, Δ_i est inclus dans $]x_i y_i, +\infty[$ car y_i est dans Δ_i et Δ_i est connexe. Inversement, tout point de $]x_i y_i, +\infty[$ est relié à y_i et se trouve donc dans Δ_i . Finalement, puisque ν vérifie **(MU)**(A) elle vérifie par définition $M(\Delta_i)$ pour tout i . Par la proposition 2.3.9 elle vérifie $M(S\backslash V)$.

∎

L'implication se démontre alors comme suit. Considérons $\overline{V} = V \cup N(V)$. La connexité de V implique celle de $\overline{V}$ et ν vérifie $M(S\backslash\overline{V})$. Ce qui s'écrit

$$\forall\, Y_{S\backslash\overline{V}}\,, \quad \mathbb{E}[\, Y_{S\backslash\overline{V}} \mid \mathcal{F}_{\overline{V}}\,] \;=\; \mathbb{E}[\, Y_{S\backslash\overline{V}} \mid \mathcal{F}_{N(S\backslash\overline{V})}\,] \quad \nu - p.s.$$

Mais $N(S\backslash\overline{V}) = \partial\overline{V}$ est inclus dans $N(V)$. D'où en conditionnant les deux membres de l'égalité ci-dessus par $N(V)$ il vient

$$\forall\, Y_{S\backslash\overline{V}}\,, \quad \mathbb{E}[\, Y_{S\backslash\overline{V}} \mid \mathcal{F}_{\overline{V}}\,] \;=\; \mathbb{E}[\, Y_{S\backslash\overline{V}} \mid \mathcal{F}_{N(V)}\,] \quad \nu - p.s.$$

En termes d'indépendance conditionnelle cela signifie que $\mathcal{F}_{S\backslash\overline{V}}$ et $\mathcal{F}_V$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{F}_{N(V)}$. Ce qui est équivalent à $M(V)$. Nous avons donc montré **(MG)** .

∎

Contre-exemples

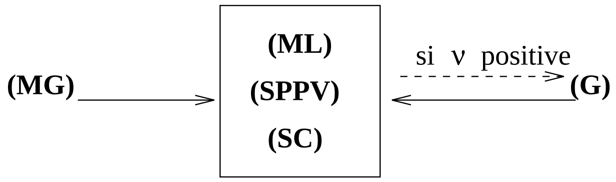
- **(ML)** $\not\Rightarrow$ **(SC)** .

  L'exemple précédent sur $\mathbb{Z}$ est encore utilisable.

- **(SC)** $\not\Rightarrow$ **(MU)** . En prenant $S = \mathbb{Z}$ l'argument utilisé pour montrer **(SC)** $\not\Rightarrow$ **(MG)** dans la section 2.3.1 est encore valable.

2.3.4 ν vérifie "w_o"

Nous précisons le cas général en faisant une hypothèse sur la mesure ν . La condition "w_o" a été définie en 2.2.7.



Relations

L'équivalence entre **(ML)** , **(SPPV)** et **(SC)** est démontrée dans [50] théorème 2.15 p. 19. Elle repose sur l'inversion de Möbius. Nous donnons une démonstration de ce théorème en détaillant certaines étapes. Nous avons besoin de deux lemmes préliminaires. Le premier exprime que la configuration "w_o" est une configuration "neutre", non "conflictuelle" (penser par exemple au cas du PP où lorsqu'un philosophe est dans l'état 0, il n'occupe aucune ressource et tout se passe comme s'il était absent). Pour tout sous-ensemble V de S, il suffit qu'il existe un sous-ensemble W de S tel que $\nu(\eta^V w_o^W)$ soit nul pour que $\nu(\eta^V)$ le soit aussi.

Lemme 2.3.2 *Soit ν vérifiant "w_o". Pour tout V fini inclus dans S,*

$$\nu(\eta^V) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\,\forall\, W \in \mathcal{P}_f(S)\,, \quad \nu(\eta^V w_o^W) = 0\,] \quad .$$

Démonstration. Soit V fini. Clairement $\nu(\eta^V)$ est supérieur ou égal à $\nu(\eta^V w_o^W)$. Si le membre de gauche est nul, il en est de même pour celui de droite. Inversement si $\nu(\eta^V w_o^W)$ est nul alors $\nu(\eta^V\gamma)$ est nul pour tout γ dans X_W par la condition "w_o" contraposée. Il vient

$$\nu(\eta^V) = \sum_{\gamma \in X_W} \nu(\eta^V\gamma) = 0\ .$$

■

Le second lemme concerne les **(SPPV)** vérifiant la condition "w_o".

Lemme 2.3.3 *Soit ν un* **(SPPV)** *vérifiant "w_o". Pour tout V dans $\mathcal{P}_f(S)$, pour tout η^V dans X_V,*

$$\begin{aligned} \nu(\eta^V) = 0 \quad \Rightarrow \quad & \exists\, C \textit{ complet non vide inclus dans } V \textit{ tel que} \\ & \forall\, x \in C, \quad \eta(x) \neq w_o(x) \\ & \textit{et} \quad \nu(\eta^C) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur le cardinal de V . Si V est de cardinal 1, $V = \{x\}$ est un graphe complet et $\eta(x)$ est différent de $w_o(x)$ car $\nu(w_o(x))$ n'est pas nul. Nous pouvons donc prendre C égal à V . Supposons le résultat vrai pour V de cardinal n et montrons le pour V de cardinal $n+1$. Soit donc V de cardinal $n+1$ et η^V

tel que $\nu(\eta^V)$ est nul. Si V est complet, tout sous-ensemble de V est complet. D'autre part, η^V diffère de w_o^V car $\nu(w_o^V)$ n'est pas nul. Nous pouvons prendre pour C l'ensemble non vide des sites x de V où $\eta(x)$ diffère de $w_o(x)$. Si V n'est pas complet, il existe x et y dans V non voisins tels que $V = W \cup \{x\} \cup \{y\}$. L'idée est d'appliquer la proposition 2.2.6 à x (ou de manière symétrique à y). Pour cela, il faut que le point x appartienne à l'intérieur de V, c'est-à-dire que $\overline{x}$ soit contenu dans V . Ce n'est pas forcément le cas. Pour y remédier nous complètons η^V par la configuration "neutre" w_o . Pour simplifier le complémentaire de V dans S est noté V^c . Nous nous intéressons donc à $\nu(\eta^V w_o^{N(x)\cap V^c})$. L'ensemble $V \cup (N(x) \cap V^c)$ est l'ensemble $V \cup N(x)$ qui contient bien $N(x)$ comme souhaité. Or la nullité de $\nu(\eta^V)$ implique celle de $\nu(\eta^V w_o^{N(x)\cap V^c})$ et donc celle de $\nu(\eta^V w_o^{N(x)\cap W^c})$ car les ensembles $N(x) \cap V^c$ et $N(x) \cap W^c$ sont identiques. D'autre part en appliquant la propriété $M(\{x\})$ (Proposition 2.2.6),

$$\begin{aligned}\nu(\eta^V w_o^{N(x)\cap W^c}) &= \nu(\eta^{W\cup\{y\}} w_o^{N(x)\cap W^c})\ \nu(\eta(x) \mid \eta^{(W\cup\{y\})\cap N(x)} w_o^{N(x)\cap W^c}) \\ &= \nu(\eta^{W\cup\{y\}} w_o^{N(x)\cap W^c})\ \nu(\eta(x) \mid \eta^{W\cap N(x)} w_o^{N(x)\cap W^c}) \\ &\quad \text{car } \ y \notin N(x) \quad .\end{aligned}$$

En répétant ce qui précède pour $W \cup \{x\}$ au lieu de V, il vient

$$\nu(\eta^V w_o^{N(x)\cap W^c})\ \nu(\eta^W w_o^{N(x)\cap W^c}) = \nu(\eta^{W\cup\{y\}} w_o^{N(x)\cap W^c})\ \nu(\eta^{W\cup\{x\}} w_o^{N(x)\cap W^c}) \ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\nu(\eta^V) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \nu(\eta^V w_o^{N(x)\cap W^c}) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \nu(\eta^{W\cup\{y\}} w_o^{N(x)\cap W^c}) = 0 \quad \text{(ou le symétrique en } x) \\ &\Rightarrow \quad \nu(\eta^{W\cup\{y\}}) = 0 \quad \text{par le lemme 2.3.2} \quad .\end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer l'hypothèse de recurrence à $W \cup \{y\}$. Donc il existe C sous-ensemble complet de $W \cup \{y\}$ tel que $\nu(\eta^C)$ soit nul et $\eta(x)$ différent de $w_o(x)$, pour tout x dans C . L'ensemble C est aussi complet dans V .

■

Remarquons que les deux hypothèses **(SPPV)** et "w_o" sont importantes. La première est essentielle pour l'utilisation de la proposition 2.2.6. Nous donnons un exemple de **(SPPV)** ne vérifiant pas "w_o" pour lequel le résultat du lemme 2.3.3 est faux. Ce **(SPPV)** ne doit pas être un système de cliques puisque le lemme 2.3.3 est clairement vrai pour tout **(SC)** (satisfaisant "w_o" ou non). Il s'agit du **(SPPV)** suivant déjà donné dans la section 2.3.1

$$\nu\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \nu\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \nu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \quad .$$

La condition "w_o" n'est pas satisfaite car

$$\nu\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} > 0 \quad \text{alors que} \quad \nu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \nu\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Au site x_2 la configuration w_o ne peut donc être égale ni à 0 ni à 1. Il est facile de voir que le lemme 2.3.3 n'est pas vérifié en considérant la configuration nulle.

Le théorème 2.15 de Suomela ([50] p. 19) est le suivant.

Proposition 2.3.11 *Soit ν une probabilité sur $(X, \mathcal{F})$ qui vérifie la condition "w_o". Soit $G = (S, E)$ un graphe non orienté localement fini. Si l'une des propriétés suivantes est vérifiée*

(i) ν est un **(SPPV)** *sur G,*
(ii) ν est un champ de Markov sur G, i.e. vérifie **(ML)** *,*
(iii) ν est un **(SC)** *sur G,*

alors pour tout V fini inclus dans S, il existe une unique factorisation de la probabilité marginale de ν sur V,

$$\nu(\eta^V) \quad = \quad Z_V^{-1} \prod_{C \in \mathcal{C}_V(G)} Q'^V_C(\eta^C) \tag{2.24}$$

où

$$\mathcal{C}_V(G) \quad = \quad \{C \subset V \quad , \quad C \text{ complet ou } \emptyset \neq C \subset \partial V\}$$

et $Q'^V_C(\eta^C) = 1$ dès qu'il existe x dans C vérifiant $\eta(x) = w_o(x)$.

Démonstration. Soit V fini fixé.

Si $\nu(\eta^V)$ est nul, pour tout W inclus dans V nous définissons les quantités $Q'^V_W(\eta^W)$ de la manière suivante. Si W est complet et si η est une configuration avec $\eta(x)$ différent de $w_o(x)$ pour tout x dans W et telle que $\nu(\eta^W)$ est nul, nous posons

$$Q'^V_W(\eta^W) \quad = \quad 0 \quad ,$$

sinon nous posons

$$Q'^V_W(\eta^W) \quad = \quad 1 \quad .$$

Puisque ν vérifie "w_o" par hypothèse et est un **(SPPV)** , nous pouvons lui appliquer le lemme 2.3.3 selon lequel

$$\begin{aligned}\nu(\eta^V) = 0 \quad \Rightarrow \quad & \exists\, C \text{ complet inclus dans } V \text{ avec } \eta(x) \neq w_o(x), \ \ \forall\, x \in C \\ & \text{et } \nu(\eta^C) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \exists\, C \text{ complet inclus dans } V \text{ tel que } Q'^V_C(\eta^C) = 0 \quad .\end{aligned}$$

La factorisation (2.24) du théorème est alors clairement vérifiée.

Si $\nu(\eta^V)$ est strictement positif. Puisque ν vérifie "w_o", pour tout W inclus dans V, $\nu(\eta^W w_o^{V \setminus W})$ est strictement positif. Nous pouvons donc définir

$$\forall\, W \subset V \ , \quad Q'^V_W(\eta^W) \quad = \quad \prod_{U \subset W} \nu(\eta^U w_o^{V \setminus U})^{(-1)^{|W \setminus U|}} \quad .$$

Considérons la fonction f_V de $\mathcal{P}(V)$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\forall\, W \subset V\,, \quad f_V(W) \;=\; \nu(\eta^W w_o^{V\setminus W}) \quad .$$

Puisque ν vérifie "w_o" f_V est héréditaire au sens de la définition 2.2.10. D'où, si $\nu(\eta^V)$ (égal à $f_V(V)$) est strictement positif, les égalités ci-dessous

$$\begin{aligned} Q'^V_W(\eta^W) &= \prod_{U\subset W} \nu(\eta^U w_o^{V\setminus U})^{(-1)^{|W\setminus U|}} \\ &= \prod_{U\subset W} f_V(U)^{(-1)^{|W\setminus U|}}\,, \end{aligned}$$

nous permettent de déduire par la formule d'inversion de Möbius présentée dans la section 2.2.7,

$$\forall\, W \subset V\,, \quad f_V(W) \;=\; \nu(\eta^W w_o^{V\setminus W}) \;=\; \prod_{U\subset W} Q'^V_U(\eta^U) \quad .$$

En particulier pour $W = V$,

$$\nu(\eta^V) \;=\; \prod_{U\subset V} Q'^V_U(\eta^U) \quad .$$

Pour obtenir l'équation (2.24) il reste à montrer que pour U n'appartenant pas à $\mathcal{C}_V(G)$, la quantité $Q'^V_U(\eta^U)$ vaut 1. Traitons séparément le cas où W est vide. Le terme $Q'^V_\emptyset$ vaut $\nu(w_o^V)$ et Z_V^{-1} dans (2.24) est égal à $\nu(w_o^V)$. Si W n'est pas vide, pour x dans W nous pouvons écrire

$$Q'^V_W(\eta^W) \;=\; \prod_{U\subset\, W\setminus\{x\}} \left[\frac{\nu(\eta^U w_o^{V\setminus U})}{\nu(\eta^{U\cup\{x\}} w_o^{V\setminus U\cup\{x\}})}\right]^{(-1)^{|W\setminus U|}} \quad . \tag{2.25}$$

Ainsi, dès qu'il existe x dans W tel que $\eta(x)$ est égal à $w_o(x)$, la factorisation (2.25) montre que $Q'^V_W(\eta^W)$ vaut 1. Supposons à présent que pour tout x dans W, $\eta(x)$ diffère de $w_o(x)$ et montrons que $Q'^V_W(\eta^W)$ vaut 1 dès que W n'est pas dans $\mathcal{C}_V(G)$. Pour x, y dans W, on a

$$Q'^V_W(\eta^W) \;=\; \prod_{U\subset\, W\setminus\{x,y\}} \left[\frac{\nu(\eta^{U\cup\{x,y\}} w_o^{V\setminus U\cup\{x,y\}})\;\; \nu(\eta^U w_o^{V\setminus U})}{\nu(\eta^{U\cup\{x\}} w_o^{V\setminus U\cup\{x\}})\;\; \nu(\eta^{U\cup\{y\}} w_o^{V\setminus U\cup\{y\}})}\right]^{(-1)^{|W\setminus U|}} \quad .$$

Si $\overline{x}$ est inclus dans V et si y n'est pas voisin de x, par l'une des trois assertions $(i), (ii)$ ou (iii) et en appliquant la proposition 2.2.6, nous pouvons factoriser, pour η quelconque dans X, $\nu(\eta^V)$ en $Q_1(\eta^\Lambda)\, Q_2(\eta^\Delta)$ où Λ et Δ sont deux ensembles dont l'union est V et tels que x n'est pas dans Λ et y n'est pas dans Δ . Nous pouvons prendre par exemple Λ égal à $V\setminus\{x\}$ et Δ égal à $\overline{x}$. Cette factorisation insérée dans la formule ci-dessus montre que $Q'^V_W(\eta^W)$ vaut 1. La conclusion souhaitée vient de ce que pour tout W n'appartenant pas à $\mathcal{C}_V(G)$ on peut toujours trouver de tels sites x et y .

Ceci achève la démonstration de la proposition 2.3.11. L'équivalence entre (i), (ii) et (iii) sous "w_o" est un corollaire de cette proposition. Nous savions déjà

$$(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) \quad .$$

La proposition montre par l'intermédiaire de (2.24) que (i) implique (iii) .

■

La proposition qui suit précise qu'un système de cliques vérifiant "w_o" est un système de cliques avec fonction d'interaction comme nous l'avons rapidement mentionné dans la partie 2.2.5.

Proposition 2.3.12 *Soit ν un système de cliques vérifiant "w_o". Il existe une famille de fonctions $Q = \{Q_C\}_{C \in \mathcal{C}(G)}$ telle que pour tout V fini*

$$\nu(\eta^{\overline{V}}) \quad = \quad Q_0^{\overline{V}}(\eta^{N(V)}) \prod_{C \in \mathcal{C}(G), C \subset \overline{V}} Q_C(\eta^C) \quad .$$

Démonstration. Soit ν un système de cliques vérifiant "w_o". En vertu de la proposition 2.3.11 nous disposons pour tout ensemble V fini d'une factorisation de type (2.24) qui est aussi un factorisation de type (2.19) si $\overline{V}$ est remplacé par V et $N(V)$ par ∂V et si nous posons

$$\begin{aligned} Q_0^V(\eta^{\partial V}) &= Z_V^{-1} \prod_{\emptyset \neq U \subset V} Q_U'^V(\eta^U) \,, \\ Q_C^V(\eta^C) &= \prod_{\emptyset \neq U \subset C} (Q_U'^V(\eta^U))^{\frac{1}{n_U}} \,, \end{aligned} \tag{2.26}$$

où n_U est le nombre de cliques de V qui contiennent U. Nous voulons montrer qu'il existe des factorisations de type (2.19) où les facteurs $Q_C^V(\eta^C)$ ne dépendent pas de V et peuvent être notés $Q_C(\eta^C)$. Soit C une clique de G telle que $\overline{C}$ est contenu dans V. L'égalité (2.24) permet d'écrire

$$\forall x \in C, \quad \nu(\eta^{\{x\}} w_o^{V \setminus \{x\}}) \quad = \quad \nu(w_o^V)\, Q'^V_{\{x\}}(\eta^{\{x\}}) \quad ,$$

d'où nous déduisons

$$Q'^V_{\{x\}}(\eta^{\{x\}}) \quad = \quad \frac{\nu(\eta^{\{x\}} \mid w_o^{V \setminus \{x\}})}{\nu(w_o^{\{x\}} \mid w_o^{V \setminus \{x\}})} \quad .$$

Or ν est un champ de Markov et V contient $\overline{x}$. Par la proposition 2.2.3 nous avons

$$Q'^V_{\{x\}}(\eta^{\{x\}}) \quad = \quad \frac{\nu(\eta^{\{x\}} \mid w_o^{N(x)})}{\nu(w_o^{\{x\}} \mid w_o^{N(x)})} \quad . \tag{2.27}$$

Ainsi, $Q'^V_{\{x\}}(\eta^{\{x\}})$ ne dépend pas de V et peut être noté $Q'_{\{x\}}(\eta^{\{x\}})$. Plus généralement, à l'aide de (2.24) nous pouvons montrer par réccurence sur $|U|$ que pour tout U dans C, $Q_U'^V(\eta^U)$ est indépendant de V. Nous en déduisons que pour toute clique C telle que $\overline{C}$ est inclus dans V, $Q_C^V(\eta^C)$ donné par (2.26) est indépendant de V. Par ailleurs, nous avons déjà montré (voir démonstration de la proposition 2.2.7) que pour tout W contenant V,

$$\nu(\eta^V) = Q_0^V(\eta^{\partial V}) \prod_{C\in\mathcal{C}(G), C\subset V} Q_C^W(\eta^C) .$$

Pour conclure il suffit de prendre W suffisamment grand c'est-à-dire tel que pour toutes les cliques C contenues dans V, $\overline{C}$ soit contenue dans W ($W=\overline{V}$ convient par exemple).

■

D'autre part un champ de Markov positif peut être vu comme une mesure de Gibbs avec un potentiel de plus proches voisins (voir Preston [42], théorème 4.1 p. 27).

Contre-exemples

(ML) $\not\Rightarrow$ **(MG)** . Si B est infini il existe des exemples de champs de Markov positifs sur $\mathbb{Z}$ (vérifiant donc "w_o" et **(ML)**) qui ne sont pas des chaînes (et ne vérifient donc pas **(MG)**). Voir l'exemple de Spitzer-Cox dans [26] p. 221.

Cas des arbres

L'espace d'états B est supposé fini. Nous donnons une condition sous laquelle un système de cliques sur un arbre est une chaîne de Markov et précisons le cas particulier de $\mathbb{Z}$.

Pour un système de cliques ν sur un arbre $A=(S,E)$, vérifiant "w_o" (donc aussi un champ de Markov sur A), pour tout V fini connexe nous avons

$$\nu(\eta^{\overline{V}}) = Q_0^{\overline{V}}(\eta^{N(V)}) \prod_{\{x,y\}\cap V\neq\emptyset} Q_{\{x,y\}}(\eta^{\{x,y\}}) \quad , \tag{2.28}$$

où $Q=\{Q_{\{x,y\}}\}_{\{x,y\}\in E}$ est une fonction d'interaction au sens de [57] qui vérifie en plus les hypothèses du théorème 3.2 de [57]. Notons au passage que les $Q_{\{x,y\}}(\eta^{\{x,y\}})$ sont donnés par,

$$Q_{\{x,y\}}(\eta^{\{x,y\}}) = Q'_{\{x\}}(\eta^{\{x\}})^{\frac{1}{|N(x)|}} Q'_{\{y\}}(\eta^{\{y\}})^{\frac{1}{|N(y)|}} Q'_{\{x,y\}}(\eta^{\{x,y\}}) , \tag{2.29}$$

ce qui s'exprime en fonction de ν grâce à (2.24) comme en (2.27). Une telle expression nous sera en particulier utile dans la section 5.4 du chapitre 5. Pour une fonction d'interaction il est possible de définir une loi de bord (ou loi d'entrée) $l=\{l_{xy}\}_{\{x,y\}\in\vec{L}}$ (voir [57] p. 897). Les l_{xy} sont des fonctions de B dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifient une condition de consistence (équation (3.4) p. 897 de [57]) et une condition de normalisation (équation (3.5)), toujours vérifiée si l'espace d'états B est fini. Nous préciserons cette notion dans le chapitre 5. Rappelons que pour V connexe, A_V est le sous-arbre de A construit sur V. Pour tout x dans $N(V)$, nous notons x_V l'unique élément de $V\cap N(x)$.

Proposition 2.3.13 *Soit ν un système de cliques sur un arbre $A=(S,E)$ vérifiant "w_o". Sa fonction d'interaction est notée Q . L'espace d'états B est supposé fini. Soit $l=\{l_{xy}\}_{\{x,y\}\in\vec{L}}$ une famille de fonctions quelconques de B dans $\mathbb{R}^+$.*

Si pour tout V fini connexe le terme $Q_0^{\overline{V}}(\eta^{N(V)})$ de l'équation (2.28) peut se mettre sous la forme $\prod_{x \in N(V)} l_{xx_V}(\eta(x))$, alors l est une loi de bord pour Q et ν est une chaîne de Markov de matrice de transition définie par

$$\forall \eta(x), \eta(y) \in B, \quad P_{x,y}(\eta(x), \eta(y)) \; = \; \frac{l_y^x(\eta(y)) \; Q_{\{x,y\}}(\eta^{\{x,y\}})}{\sum_{\gamma \in B} l_y^x(\gamma) \; Q_{\{x,y\}}(\eta^{\{x\}}\gamma)} \quad . \tag{2.30}$$

Démonstration. Si le terme $Q_0^{\overline{V}}$ a la forme donnée dans la proposition, ν vérifie l'équation (12.13) du théorème 12.12 de Georgii [26]. La mesure ν étant une probabilité nous en déduisons l'équation de consistence (12.14) dans [26]. Cette équation (12.14) (voir [26] p. 245) implique l'équation de consistence (3.4) de [57] et l est bien une loi de bord pour Q . Le théorème 3.2 de Zachary [57] montre alors que ν est une chaîne de Markov sur A . Sa matrice de transition découle de (12.13). L'expression (2.30) est donnée dans [26] p. 244.

■

Pour $\mathbb{Z}$ nous considérons le cas où la fonction d'interaction $Q = \{Q_{\{x,x+1\}}\}_{x \in \mathbb{Z}}$ est homogène, c'est-à-dire déterminée par une matrice $\mathcal{Q}$ sur B

$$Q_{\{x,x+1\}} = \mathcal{Q} \quad \forall x \in \mathbb{Z} .$$

La matrice $\mathcal{Q}$ n'est pas forcément stochastique mais joue le rôle d'une matrice de transition. En physique statistique elle porte le nom de matrice de transfert. Elle correspond aussi à la matrice de compatibilité définie dans le chapitre 2.

Proposition 2.3.14 *Soit ν un système de cliques sur $\mathbb{Z}$ vérifiant "w_o", de fonction d'interaction Q homogène déterminée par une matrice $\mathcal{Q}$. L'espace d'états B est fini. La mesure ν est une chaîne de Markov.*

Démonstration. Georgii ([26] théorème 3.5 p. 45) ou Spitzer [47] montrent qu'un champ de Markov positif avec une fonction d'interaction homogène, pour un espace d'états fini B est une chaîne de Markov. Leurs démonstrations s'étendent facilement au cas où le champ vérifie seulement "w_o". La matrice $\mathcal{Q}$ est dite positive si ses coefficients sont strictement positifs. Lorsque $\mathcal{Q}$ est positive et B fini, $\mathcal{Q}$ est irréductible apériodique et on peut lui appliquer le théorème de Perron-Frobenius pour construire une matrice stochastique irréductible apériodique équivalente à $\mathcal{Q}$ (au sens de la relation (1.10) définie dans le chapitre 1). Sous la condition "w_o", $\mathcal{Q}$ n'est plus forcément positive mais elle reste irréductible apériodique (en fait $\mathcal{Q}^2$ est positive). La même idée, non détaillée ici, est donc applicable.

■

Noter que l'exemple qui illustre **(ML)** $\not\Rightarrow$ **(MG)** dans la section 2.3.1 est un champ de Markov homogène mais ne vérifie pas "w_o".

La proposition 2.3.14 s'applique notamment aux mesures réversibles du PP sur $\mathbb{Z}$ qui sont donc clairement des chaînes de Markov. Cela permet entre autres de montrer l'unicité de la mesure réversible et même l'ergodicité du PP sur $\mathbb{Z}$ (voir [54]). Pour le PP sur des arbres infinis la situation est plus complexe. Les mesures réversibles sont des systèmes de cliques mais ne sont pas toutes des chaînes de Markov. Il n'y a pas toujours unicité de la mesure réversible. Nous reviendrons plus en détail sur ces questions dans le chapitre 5.

Chapitre 3

Réversibilité et comparaison stochastique pour les systèmes de particules

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré des champs aléatoires, c'est-à-dire des ensembles de variables aléatoires $\{w(x), x \in S\}$ indicées par un ensemble dénombrable S de sites dans l'espace. Ce cadre est celui dans lequel on se trouve lorsque l'on étudie des systèmes de ressources partagées à l'équilibre. Dans cette partie, nous introduisons un paramètre temporel supplémentaire. Nous considérons des systèmes qui évoluent dans le temps, dont l'état à l'instant t est donné par un ensemble de variables aléatoires attachées aux sites de S. Nous les notons $\{\eta_t(x), x \in S\}$ pour suivre les notations de Liggett [36] dont nous empruntons la terminologie et le formalisme. Ces systèmes sont décrits par des processus stochastiques $\{\eta_t,\ t \geq 0\}$ qui sont définis à partir d'une configuration initiale et d'une dynamique que nous choisirons toujours markovienne. De tels processus peuvent être vus comme des systèmes de particules tels qu'ils sont introduits par Liggett dans [36]. Dans ce chapitre, nous notons B_x un espace d'états fini qui joue le rôle de l'espace des phases du site x. Pour un sous-ensemble T de S, nous notons

$$X_T = \bigotimes_{x \in T} B_x \ .$$

Les systèmes de particules que nous considérons sont des processus de Feller sur l'espace d'états

$$X = \bigotimes_{x \in S} B_x \ ,$$

muni de sa tribu borélienne $\mathcal{F}$. Leur évolution est décrite par une famille de taux de transition

$$\{c_T(\eta, \gamma)\,,\ \eta \in X,\ T \in \mathcal{P}_f(S),\ \gamma \in X_T\}\ .$$

Rappelons que $\mathcal{P}_f(S)$ est l'ensemble des sous-ensembles finis de S. Pour tout T dans $\mathcal{P}_f(S)$ et toute configuration η dans X, $c_T(\eta, \gamma)$ est une fonction continue de η (X est muni de la topologie produit). Nous supposons vérifiées les conditions d'existence et d'unicité, données dans [36] p.27, pour de tels systèmes. Un système de particules est associé à un générateur markovien Ω. Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions définies sur X qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées. La restriction de Ω à $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\forall f \in \mathcal{D},\ \forall \eta \in X, \quad \Omega f(\eta) \ = \sum_{T \in \mathcal{P}_f(S)} \Omega_T f(\eta)\ , \tag{3.1}$$

avec

$$\Omega_T f(\eta) \ = \sum_{\gamma \in X_T} c_T(\eta, \gamma)\left(f(\eta_T^\gamma) - f(\eta)\right)\ , \tag{3.2}$$

et

$$\eta_T^\gamma(x) = \begin{cases} \gamma(x) & \text{si } x \in T \\ \eta(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le semi-groupe de Feller $\{S(t)\}$ associé agit sur l'ensemble $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues sur X. Pour T fixé dans $\mathcal{P}_f(S)$, les taux locaux $\{c_T(\eta, \gamma),\ \eta \in X,\ \gamma \in X_T\}$ décrivent l'évolution d'un processus de Feller sur X. Nous le qualifierons de processus *T-local* car seules les transitions affectant les sites de T sont autorisées. Son générateur correspond à Ω_T défini en (3.2). Les systèmes de particules sont des superpositions de processus T-locaux n'affectant que des parties finies de sites. Les systèmes de spins sont des cas particuliers de ces systèmes. Les configurations sont à valeurs dans $\{0, 1\}$ et ne peuvent changer qu'en un site à la fois. Divers outils de traitements pour les systèmes de spins sont présentés dans le chapitre 3 de [36]. Ici, nous étendons certains de ces résultats à des systèmes de particules plus généraux où l'espace des phases n'est plus forcément $\{0, 1\}$ et où plusieurs sites peuvent changer simultanément d'état. Cette étude est essentiellement motivée par les applications aux modèles de ressources partagées que nous introduisons dans le chapitre 4 et pour lesquels les outils classiques (systèmes de spins) ne sont plus utilisables. Plus précisément, dans une première partie nous nous intéressons à la notion de réversibilité, puis dans une deuxième partie à la comparaison stochastique et au couplage. Cette dernière fait la synthèse des techniques que nous avons présentées dans [20] et [21]. Outre l'ouvrage de Liggett [36], nous nous référons aux travaux de Kelly [31] pour la réversibilité et de Massey [39] pour la comparaison stochastique. Toutefois ces références ne traitent que le cas des processus de Markov à espace d'états dénombrable (cas de S fini) et leurs résultats ne sont pas toujours adaptés aux systèmes de particules qui nous intéressent.

3.1 Réversibilité des systèmes de particules

La réversibilité est un outil qui facilite la résolution d'un grand nombre de problèmes. Diverses utilisations sont montrées dans [31] pour les processus de Markov à espaces d'états dénombrables. Liggett (chap.2, section 5 p.90 dans [36]) l'introduit dans le cadre des systèmes de particules. Les mesures réversibles sont en général beaucoup plus faciles à calculer, comme nous l'avons illustré avec le PP dans le chapitre 1. Il est intéressant de pouvoir les reconnaître. La proposition 5.3 p.91 chap.2 dans [36] donne une caractérisation de ces mesures qui fait intervenir le générateur Ω. Nous la rappelons ci-dessous.

Proposition 3.1.1 *Soit un système de particules de générateur Ω et ν une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{F})$. La mesure ν est réversible pour ce système de particules si et seulement si*

$$\forall f, g \in \mathcal{D}, \quad \int f\Omega g \, d\nu \;=\; \int g\Omega f \, d\nu \,. \tag{3.3}$$

Pour les systèmes de spins, ce critère est précisé en termes de taux de transition dans le chapitre 4 de [36]. Dans ce cas, les seuls taux de transition qui peuvent être non nuls sont les taux $c_{\{x\}}(\eta, 1-\eta(x))$. Ils peuvent être notés sans ambiguïté $c(x,\eta)$. D'après la proposition 2.7 p.192 de [36], une mesure ν est réversible pour un système de spins de taux $c(x,\eta)$ si et seulement si

$$\forall x \in S,\ \forall f \in \mathcal{C}(X), \quad \int c(x,\eta)\,[f(\eta_x) - f(\eta)]\, d\nu \;=\; 0\,. \tag{3.4}$$

Un autre cas simple est celui de S fini. Les systèmes de particules considérés sont alors des processus de Markov à valeurs dans un espace d'états X fini et une mesure ν est réversible si et seulement si

$$\forall T \in \mathcal{P}(S),\ \forall \gamma, \delta \in X_T,\ \forall \eta \in X, \quad c_T(\eta_T^\gamma, \delta)\nu(\eta_T^\gamma) \;=\; c_T(\eta_T^\delta, \gamma)\nu(\eta_T^\delta)\,. \tag{3.5}$$

Notre objectif dans ce qui suit est de donner pour des systèmes de particules plus généraux une caractérisation de la réversibilité à l'aide des taux de transition. Ces taux interviennent dans l'expression (3.1) du générateur. Une telle décomposition en processus T-locaux n'est pas unique. Pour pouvoir donner des conditions nécessaires et suffisantes de réversibilité, nous supposons dans cette partie que le taux $c_T(\eta,\gamma)$ est nul dès qu'il existe x dans T tel que $\eta(x) = \gamma(x)$. Le taux $c_T(\eta,\gamma)$ peut alors s'interpréter comme le taux avec lequel les sites de T passent de la configuration $\eta(T)$ à la configuration γ lorsque la configuration courante du système est η.

3.1.1 Caractérisation des mesures réversibles

Pour tout sous-ensemble T de S, notons $I_T(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X qui sont indépendantes de l'état des sites sur T. La caractérisation (3.3) et l'expression (3.1) du générateur conduisent au critère suivant.

Proposition 3.1.2 *Soit un système de particules de taux $c_T(\eta,\gamma)$ et ν une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{F})$. La mesure ν est réversible si et seulement si*

$$\forall T \in \mathcal{P}_f(S),\ \forall \gamma, \delta \in X_T,\ \forall h \in I_T(X),$$
$$\int c_T(\eta,\gamma)\, h(\eta)\, \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\delta\}}\, d\nu \;=\; \int c_T(\eta,\delta)\, h(\eta)\, \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\gamma\}}\, d\nu\,. \tag{3.6}$$

Remarquons que si pour tout T dans $\mathcal{P}_f(S)$, pour tout ξ dans X, nous notons $\rho_T(\xi)$ une version de la probabilité conditionnelle

$$\rho_T(\xi) \;=\; \nu(\eta(T) = \xi^T \mid \eta(S\backslash T) = \xi^{S\backslash T}),$$

l'égalité (3.6) est équivalente à

$$\forall T \in \mathcal{P}_f(S),\ \forall \gamma, \delta \in X_T, \quad \rho_T(\eta_T^\delta) c_T(\eta_T^\delta, \gamma) \;=\; \rho_T(\eta_T^\gamma) c_T(\eta_T^\gamma, \delta) \quad \nu - p.s. \tag{3.7}$$

En effet, par définition, $\rho_T(\eta_T^\gamma)$ est, à un ensemble négligeable près, la seule fonction de η indépendante de $\eta(T)$ qui vérifie

$$\forall f \in I_T(X), \quad \int \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\gamma\}}\, f(\eta)\, d\nu \;=\; \int \rho_T(\eta_T^\gamma)\, f(\eta)\, d\nu\ . \tag{3.8}$$

Pour toute fonction h dans $I_T(X)$, nous pouvons utiliser (3.8) avec $f(\eta) = c_T(\eta_T^\gamma, \delta)\ h(\eta)$, qui ne dépend pas de $\eta(T)$.

Démonstration. Soulignons d'abord que l'espace d'états X étant compact, une fonction continue sur X est intégrable pour toute mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{F})$. Si (3.6) est vraie pour toute fonction intégrable indépendante de $\eta(T)$ alors (3.6) est vraie pour toute fonction de $I_T(X)$. Inversement, si (3.6) est vérifiée pour toute fonction de $I_T(X)$, elle est aussi vérifiée pour toute fonction caractéristique de cylindre de base finie, indépendante de $\eta(T)$. Par conséquent (3.6) est vraie pour toute fonction intégrable qui ne dépend pas de $\eta(T)$. Ainsi dans la condition (3.6), $I_T(X)$ peut être remplacé par l'ensemble des fonctions intégrables indépendantes de $\eta(T)$. Dans ce qui suit, il est donc légitime d'échanger les signes somme et intégrale car toutes les fonctions impliquées sont intégrables. Soient f et g dans $\mathcal{D}$ et T dans $\mathcal{P}_f(S)$. Nous pouvons écrire

$$g(\eta) = \sum_{\delta \in X_T} g(\eta_T^\delta)\ \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\delta\}}\ .$$

En utilisant l'expression (3.1) du générateur, il vient alors

$$\begin{aligned} \int g(\eta) \Omega f(\eta)\, d\nu \;&=\; \sum_{T \in \mathcal{P}_f(S)} \left(\sum_{\gamma,\delta \in X_T \times X_T} \int g(\eta_T^\delta)\ f(\eta_T^\gamma)\ c_T(\eta, \gamma)\ \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\delta\}}\, d\nu \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\gamma \in X_T} \int f(\eta)\ g(\eta)\ c_T(\eta, \gamma)\, d\nu \right)\ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Or pour tout γ, δ de X_T, les fonctions $g(\eta_T^\delta)$ et $f(\eta_T^\gamma)$ appartiennent à $I_T(X)$. Si nous supposons (3.6) vérifiée, en considérant successivement pour tout γ, δ dans X_T, $h(\eta) = g(\eta_T^\delta) f(\eta_T^\gamma)$, l'expression (3.9) devient

$$\begin{aligned} \int g(\eta) \Omega f(\eta)\, d\nu \;&=\; \sum_{T \in \mathcal{P}_f(S)} \left(\sum_{\gamma,\delta \in X_T \times X_T} \int g(\eta_T^\delta)\ f(\eta_T^\gamma)\ c_T(\eta, \delta)\ \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\gamma\}}\, d\nu \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\gamma \in X_T} \int f(\eta)\ g(\eta)\ c_T(\eta, \gamma)\, d\nu \right) \\ &= \int f(\eta) \Omega g(\eta)\, d\nu\ . \end{aligned}$$

Ce qui prouve que ν est réversible.

Réciproquement, considérons f et g dans $\mathcal{D}$. Si ν est réversible, la caractérisation (3.3) et l'expression (3.1) du générateur conduisent à

$$\int \sum_{U\in\mathcal{P}_f(S)} \sum_{\xi\in X_U} c_U(\eta,\xi)\; g(\eta)\; f(\eta_U^\xi)\; d\nu \;=\; \int \sum_{U\in\mathcal{P}_f(S)} \sum_{\xi\in X_U} c_U(\eta,\xi)\; f(\eta)\; g(\eta_U^\xi)\; d\nu \quad (3.10)$$

Fixons T dans $\mathcal{P}_f(S)$ et γ,δ dans X_T. Soit h une fonction de $\mathcal{D}$ positive ne dépendant pas de $\eta(T)$. Posons $f(\eta)=\sqrt{h(\eta)}\mathbf{1}_{\{\eta(T)=\gamma\}}$ et $g(\eta)=\sqrt{h(\eta)}\mathbf{1}_{\{\eta(T)=\delta\}}$. Ces fonctions sont le produit de deux termes dont l'un est indépendant de $\eta(T)$ et l'autre est indépendant de $\eta(S\backslash T)$. S'il existe x dans T tel que $\gamma(x)=\delta(x)$ alors les taux $c_T(\eta_T^\delta,\gamma)$ et $c_T(\eta_T^\gamma,\delta)$ sont nuls par convention et l'égalité (3.6) est clairement vérifiée. Nous pouvons donc supposer que pour tout x dans T, $\gamma(x)\neq\delta(x)$. Il est alors facile de montrer que

si $U\neq T$, $\forall\xi\in X_T$,

$$f(\eta)g(\eta_U^\xi) \;=\; g(\eta)f(\eta_U^\xi)\,. \quad (3.11)$$

Si $U=T$, $\forall\xi\in X_T$,

$$\begin{aligned} f(\eta)g(\eta_U^\xi) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \xi\neq\delta \\ h(\eta)\mathbf{1}_{\{\eta(T)=\gamma\}} & \text{si } \xi=\delta \end{cases} \\ &\text{et} \\ g(\eta)f(\eta_U^\xi) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \xi\neq\gamma \\ h(\eta)\mathbf{1}_{\{\eta(T)=\delta\}} & \text{si } \xi=\gamma\,. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12)$$

En utilisant (3.11), l'équation (3.10) se simplifie en

$$\int \sum_{\xi\in X_T} c_T(\eta,\xi)\; g(\eta)\; f(\eta_T^\xi)\; d\nu \;=\; \int \sum_{\xi\in X_T} c_T(\eta,\xi)\; f(\eta)\; g(\eta_T^\xi)\; d\nu\,.$$

Puis, en utilisant (3.12), il vient pour toute fonction h de $\mathcal{D}$ positive et ne dépendant pas de $\eta(T)$,

$$\int c_T(\eta,\gamma)\; h(\eta)\; \mathbf{1}_{\{\eta(T)=\delta\}}\; d\nu \;=\; \int c_T(\eta,\delta)\; h(\eta)\; \mathbf{1}_{\{\eta(T)=\gamma\}}\; d\nu\,.$$

Pour étendre l'égalité ci-dessus à toute fonction h dans $I_T(X)$, il suffit d'écrire $h=h_+-h_-$ avec $h_+(\eta)=\max(h(\eta),0)$ et $h_-(\eta)=\max(-h(\eta),0)$ et d'utiliser la densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{C}(X)$. ■

Pour les systèmes de spins, nous retrouvons bien (3.4) à partir de (3.6) en écrivant $c(x,\eta)$ sous la forme

$$c(x,\eta)=c_{\{x\}}(\eta_x^1,0)\mathbf{1}_{\{\eta(x)=1\}}+c_{\{x\}}(\eta_x^0,1)\mathbf{1}_{\{\eta(x)=0\}}\,.$$

La formulation (3.6) nous semble plus commode que (3.7) pour montrer la proposition 3.1.3 que nous appelons lemme de troncature. Nous l'avons déjà énoncé sans démonstration pour les systèmes de spins dans le chapitre 1 (proposition 1.1.1). Le but était de montrer l'existence d'une mesure réversible pour le PP. Ce lemme exprime le fait que la réversibilité est conservée par une opération dite de troncature. Plus précisément, si un processus est restreint à rester dans un sous-ensemble de son espace d'états (par exemple l'ensemble des configurations admissibles pour le PP), une mesure réversible pour ce processus tronqué est obtenue en considérant la restriction au sous-ensemble d'une mesure réversible pour le processus initial. Ce résultat est démontré pour des espaces d'états dénombrables dans [31] (corollaire 1.10 p. 26). Nous le généralisons aux systèmes de particules sur S infini. Notons que cette propriété n'est pas vraie pour des mesures invariantes non réversibles.

Définition 3.1.1 *Soit un système de particules de taux $c_T(\eta,\gamma)$. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble mesurable de X. Le système de particules tronqué à $\mathcal{A}$ a des taux $c_T^{\mathcal{A}}(\eta,\gamma)$ définis par*

$$c_T^{\mathcal{A}}(\eta,\gamma) \;=\; \begin{cases} 0 & si\ \eta \in \mathcal{A} \ \ et \ \ \eta_T^\gamma \notin \mathcal{A} \\ c_T(\eta,\gamma) & sinon. \end{cases}$$

Nous appelons lemme de troncature la proposition suivante.

Proposition 3.1.3 *Soit un système de particules de taux $c_T(\eta,\gamma)$ et ν une mesure réversible pour ce système. Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble mesurable de X tel que $\nu(\mathcal{A})>0$ et $\nu_{\mathcal{A}}$ la mesure de probabilité définie par*

$$\nu_{\mathcal{A}}(\,.\,) \;=\; \nu(\,.\,|\,.\in\mathcal{A}\,)\,.$$

La mesure $\nu_{\mathcal{A}}$ est réversible pour le système tronqué de taux $c_T^{\mathcal{A}}(\eta,\gamma)$.

Démonstration. Nous précisons la notation de l'espérance $I\!E_\nu[f(\eta)] = \int f(\eta)\ d\nu$. D'après la caractérisation (3.6) pour montrer que $\nu_{\mathcal{A}}$ est réversible pour les taux $c_T^{\mathcal{A}}(\eta,\gamma)$ il suffit de vérifier

$$\begin{aligned} &\forall T\in\mathcal{P}_f(S),\ \forall\gamma,\delta\in X_T,\ \forall h\in I_T(X),\\ &\qquad I\!E_{\nu_{\mathcal{A}}}[c_T^{\mathcal{A}}(\eta,\gamma)\ h(\eta)\ \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\delta\}}] \;=\; I\!E_{\nu_{\mathcal{A}}}[c_T^{\mathcal{A}}(\eta,\delta)\ h(\eta)\ \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\gamma\}}] \end{aligned} \tag{3.13}$$

Or, par définition de $\nu_{\mathcal{A}}$ nous avons pour toute fonction intégrable f,

$$I\!E_{\nu_{\mathcal{A}}}[f(\eta)] = \frac{I\!E_\nu[f(\eta)\ \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\eta)]}{\nu(\mathcal{A})}\,.$$

Le membre de gauche dans (3.13) peut donc se réécrire

$$\frac{1}{\nu(\mathcal{A})}\qquad I\!E_\nu[c_T^{\mathcal{A}}(\eta,\gamma)\ h(\eta)\ \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\delta\}}\ \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\eta)]\,. \tag{3.14}$$

Nous définissons les ensembles

$$\mathcal{A}_\gamma = \{\eta\in\mathcal{A},\ \eta_T^\gamma\in\mathcal{A}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{\gamma,\delta} = \{\eta\in\mathcal{A},\ \eta_T^\gamma\in\mathcal{A} \text{ et } \eta_T^\delta\in\mathcal{A}\}\,.$$

Par définition, $c_T^{\mathcal{A}}(\eta,\gamma)\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\eta)$ peut s'écrire $c_T^{\mathcal{A}}(\eta,\gamma)\mathbb{1}_{\mathcal{A}_\gamma}(\eta)$.

D'autre part, nous avons clairement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\{\eta(T)=\delta\}}\ \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{\gamma,\delta}} &= \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\delta\}}\ \mathbb{1}_{\mathcal{A}_\gamma} \\
\mathbb{1}_{\{\eta(T)=\gamma\}}\ \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{\gamma,\delta}} &= \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\gamma\}}\ \mathbb{1}_{\mathcal{A}_\delta}\ .
\end{aligned}$$

Ainsi (3.14) devient

$$\frac{1}{\nu(\mathcal{A})} \qquad \mathbb{E}_\nu[c_T^{\mathcal{A}}(\eta,\gamma)\ h(\eta)\ \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\delta\}}\ \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{\gamma,\delta}}(\eta)]\ . \tag{3.15}$$

L'égalité (3.13) est donc équivalente à

$$\mathbb{E}_\nu[c_T^{\mathcal{A}}(\eta,\gamma)\ h(\eta)\ \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\delta\}}\ \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{\gamma,\delta}}(\eta)] \;=\; \mathbb{E}_\nu[c_T^{\mathcal{A}}(\eta,\delta)\ h(\eta)\ \mathbb{1}_{\{\eta(T)=\gamma\}}\ \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{\gamma,\delta}}(\eta)]\ . \tag{3.16}$$

Cette dernière égalité est conséquence de la réversibilité de ν et de la caractérisation (3.6) appliquée à la fonction $h(\eta)\ \mathbb{1}_{\mathcal{A}_{\gamma,\delta}}(\eta)$ intégrable et indépendante de $\eta(T)$.

■

Ainsi, la réversibilité est conservée par troncature. Cela nous sera utile dans la suite pour prouver l'existence d'une mesure réversible pour des modèles construits par restriction à un sous-ensemble (comme dans le cas du PP). Nous avons déjà mentionné que les mesures réversibles étaient plus faciles à calculer. Cela est dû à une propriété de factorisation de ces mesures que nous avons déjà utilisée dans le chapitre 2. Dans la section 3.1.2, nous allons montrer que, sous certaines hypothèses sur les taux, les mesures réversibles se révèlent être aussi des champs de Markov au sens de la définition 2.1.8. C'est un résultat classique dans le cas des systèmes de spins avec taux de plus proches voisins strictement positifs. Nous le montrons (proposition 3.1.6) dans un cadre plus large. Dans ce but, nous donnons une autre écriture de la condition (3.6) qui va nous permettre d'exprimer les probabilités conditionnelles. Nous introduisons la notation suivante.

Définition 3.1.2 *Soit un système de particules de taux $c_T(\eta,\gamma)$. Soit T dans $\mathcal{P}_f(S)$. Pour γ,δ dans X_T, un chemin de γ à δ est une suite d'éléments de X_T, $(\xi_0,\dots,\xi_n)$ notée σ_T, vérifiant $\xi_0=\gamma$ et $\xi_n=\delta$. Pour η dans X, nous notons*

$$\sigma_T(\eta,\gamma,\delta) \;=\; \prod_{i=1}^{n} c_{R_i}(\eta_T^{\xi_{i-1}},\xi_i(R_i))\ ,$$

avec $R_i=\{x\in T,\ \xi_{i-1}(x)\neq\xi_i(x)\}$.

Pour le chemin $(\xi_n,\dots,\xi_0)$ de δ à γ, nous notons

$$\overline{\sigma_T(\eta,\gamma,\delta)} \;=\; \prod_{i=1}^{n} c_{R_i}(\eta_T^{\xi_i},\xi_{i-1}(R_i))\ ,$$

avec la convention $c_\emptyset(\eta,\gamma)=1$.

Considérons le cas particulier des systèmes de type spin où un seul site peut changer d'état à la fois.

Définition 3.1.3 *Un système de particules de taux $c_T(\eta, \gamma)$ est dit de type spin si*

$$c_T(\eta, \gamma) = 0 \quad \textit{dès que } |T| \geq 2 \; .$$

Par analogie avec les systèmes de spins, les taux non nuls sont alors notés $c(x, \eta, \gamma)$.

Dans ces systèmes, pour γ et δ dans X_T, les seuls chemins vérifiant $\sigma_T(\eta, \gamma, \delta) > 0$ sont tels que pour tout $i = 1 \dots n$, $|R_i| \leq 1$. Ainsi lorsque γ et δ diffèrent en q sites, un tel chemin sera au moins de longueur q.

La condition (3.7) (ou (3.6)) s'étend de manière immédiate comme suit.

Proposition 3.1.4 *Soit un système de particules de taux $c_T(x, \eta)$ et ν une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{F})$. La mesure ν est réversible si et seulement si pour tout T dans $\mathcal{P}_f(S)$, pour tout γ, δ dans X_T et tout chemin σ_T de γ à δ,*

$$\rho_T(\eta_T^\gamma)\sigma_T(\eta, \gamma, \delta) \quad = \quad \rho_T(\eta_T^\delta)\overline{\sigma_T(\eta, \gamma, \delta)} \;\; \nu\text{-}p.s. \tag{3.17}$$

L'intérêt de la forme (3.17) par rapport à (3.7) est d'être écrite de manière plus générale dans le sens où dans l'équation (3.17) nous ne passons pas forcément en une transition d'une configuration γ à une configuration δ. De plus, nous allons voir que sous certaines conditions sur les taux de transition, il est possible d'exprimer complètement les probabilités conditionnelles d'une mesure réversible en fonction de ces taux. Une écriture telle que (3.17), par rapport à l'écriture (3.7), permet de donner ces conditions sous la forme la moins contraignante. Remplacer dans l'inégalité (3.18) ci-dessous, le terme $\sigma_T(\eta, \gamma, \delta)$ par $c_T(\eta_T^\gamma, \delta)$ revient à ne considérer que les chemins de longueur 1, ce qui est clairement plus restrictif lorsque certaines transitions ne sont pas autorisées. Pour les systèmes de type spin par exemple, $c_T(\eta_T^\gamma, \delta)$ est nul dès que γ et δ diffèrent en plus d'un site.

Proposition 3.1.5 *Soit un système de particules de taux $c_T(\eta, \gamma)$ et ν une mesure réversible pour ce système. Soit T dans $\mathcal{P}_f(S)$ et γ dans X_T. S'il existe un ensemble de chemins vers γ, indexé par δ dans X_T, $\{\sigma_T$ de δ à $\gamma, \delta \in X_T\}$ tel que*

$$\forall \eta \in X, \quad \sum_{\delta \in X_T} \left(\overline{\sigma_T(\eta, \delta, \gamma)} \prod_{\xi \neq \delta} \sigma_T(\eta, \xi, \gamma) \right) > 0 \; , \tag{3.18}$$

alors il existe une version continue de la probabilité conditionnelle $\rho_T(\eta_T^\gamma)$ donnée par

$$\rho_T(\eta_T^\gamma) \quad = \quad \frac{\prod_{\xi \in X_T} \sigma_T(\eta, \xi, \gamma)}{\sum_{\delta \in X_T} (\overline{\sigma_T(\eta, \delta, \gamma)} \prod_{\xi \neq \delta} \sigma_T(\eta, \xi, \gamma))} \quad \nu - p.s. \tag{3.19}$$

Démonstration. La mesure ν étant réversible, par la proposition 3.1.4, pour tout δ dans X_T, nous pouvons écrire

$$\rho_T(\eta_T^\gamma) \, \overline{\sigma_T(\eta, \delta, \gamma)} \prod_{\xi \neq \delta} \sigma_T(\eta, \xi, \gamma) \quad = \quad \rho_T(\eta_T^\delta) \prod_{\xi \in X_T} \sigma_T(\eta, \xi, \gamma) \;\; \nu\text{-p.s.}$$

En sommant cette égalité sur δ, il vient

$$\rho_T(\eta_T^\gamma) \sum_{\delta\in X_T} (\overline{\sigma_T(\eta,\delta,\gamma)} \prod_{\xi\neq\delta} \sigma_T(\eta,\xi,\gamma)) \quad = \quad \prod_{\xi\in X_T} \sigma_T(\eta,\xi,\gamma)$$

D'où (3.19). La continuité de $\rho_T(\eta_T^\gamma)$ se déduit alors de la continuité des taux.

■

Il faut noter que l'expression (3.19) est en fait indépendante des chemins σ_T de δ à γ vérifiant (3.18). En effet, s'il existe une mesure réversible, nous pouvons vérifier (critère de Kolmogorov, p. 21 chap. 1 dans [31]) que si $\rho_T(\eta_T^\gamma)$ est strictement positif alors pour T dans $\mathcal{P}_f(S)$, γ,δ dans X_T et σ_T, ${\sigma'}_T$ deux chemins de δ à γ, nous avons

$$\forall \eta\in X, \quad \sigma_T(\eta,\delta,\gamma)\overline{{\sigma'}_T(\eta,\delta,\gamma)} \quad = \quad {\sigma'}_T(\eta,\delta,\gamma)\overline{\sigma_T(\eta,\delta,\gamma)}\,. \tag{3.20}$$

A l'aide de (3.20), il est facile de voir que dans l'expression

$$\prod_{\xi\in X_T} \sigma_T(\eta,\xi,\gamma) \quad \sum_{\delta\in X_T} \left(\overline{{\sigma'}_T(\eta,\delta,\gamma)} \prod_{\xi\neq\delta} {\sigma'}_T(\eta,\xi,\gamma)\right)$$

nous pouvons échanger σ_T et ${\sigma'}_T$. Ainsi, pour des chemins σ_T et ${\sigma'}_T$ de δ à γ vérifiant (3.18) nous retrouvons bien la même expression pour $\rho_T(\eta_T^\gamma)$.

La condition (3.18) est raisonnable. Lorsque les taux sont strictement positifs, elle est clairement satisfaite. De plus, pour $T = \{x\}$ et des chemins $\sigma_T = (\delta,\gamma)$ de longueur 1, la proposition indique que si

$$\forall \eta\in X, \quad \sum_{\delta\in B_x} (c(x,\eta_x^\gamma,\delta) \prod_{\xi\neq\delta} c(x,\eta_x^\xi,\gamma)) \ > \ 0$$

alors pour ν réversible il vient

$$\rho_x(\eta_x^\gamma) \quad = \quad \frac{\prod_{\xi\in B_x} c(x,\eta_x^\xi,\gamma)}{\sum_{\delta\in B_x} (c(x,\eta_x^\gamma,\delta) \prod_{\xi\neq\delta} c(x,\eta_x^\xi,\gamma))} \quad \nu\text{-p.s.} \tag{3.21}$$

avec la convention $c(x,\eta,\gamma) = 1$ si $\eta(x) = \gamma$.
Dans le cas des systèmes de spins avec $B_x = \{0,1\}$, en prenant $\gamma = 1$ nous trouvons que si

$$\forall \eta\in X, \quad c(x,\eta_x^1,0) + c(x,\eta_x^0,1) \ > \ 0$$

alors

$$\rho_x(\eta_x^1) \ = \ \frac{c(x,\eta_x^0,1)}{c(x,\eta_x^1,0) + c(x,\eta_x^0,1)} \quad \nu\text{-p.s.}$$

Nous retrouvons le résultat de Liggett (proposition 2.7 p. 193 chap. 4 dans [36]) démontré pour des taux strictement positifs mais dont la preuve reste valable sous la condition plus faible $c(x,\eta) + c(x,\eta_x) > 0$ (avec les notations de [36]). Notons que dans le cas des systèmes de spins, ν est réversible si et seulement si (3.21) est vérifiée pour tout x dans S et tout γ dans B_x, ce qui s'écrit plus simplement

$$\forall x \in S,\ \forall \eta \in X, \quad \rho_x(\eta) \quad = \quad \frac{c(x, \eta_x)}{c(x, \eta_x) + c(x, \eta)} \quad \nu - \text{p.s.} \tag{3.22}$$

L'équivalence vient de la caractérisation (3.7) et du fait que lorsque (3.22) est vérifiée les expressions $c(x, \eta)\rho_x(\eta)$ et $c(x, \eta_x)\rho_x(\eta_x)$ sont égales. L'équivalence est encore vraie pour les systèmes de spins synchronisés introduits dans [24]. Dans ces systèmes, $B_x = \{0, 1\}$ et une transition fait passer d'une configuration η à une configuration η_T obtenue en changeant simultanément les spins d'un sous-ensemble fini T de S. Une telle transition se fait avec un taux noté $c(T, \eta)$. Avec les notations utilisées dans [24], si pour tout T dans $\mathcal{P}_f(S)$,

$$\forall \eta \in X, \quad c(T, \eta) + c(T, \eta_T) > 0$$

alors ν est réversible si et seulement si

$$\forall T \in \mathcal{P}_f(S), \quad \rho_T(\eta) = \frac{c(T, \eta_T)}{c(T, \eta) + c(T, \eta_T)} \quad \nu\text{-p.s.}$$

Dans le cas général, contrairement aux deux cas précédents, le fait que (3.19) soit vérifiée pour tout T dans $\mathcal{P}_f(S)$ et tout γ dans X_T n'implique pas nécessairement

$$\rho_T(\eta_T^\gamma)\sigma_T(\eta, \gamma, \delta) = \rho_T(\eta_T^\delta)\overline{\sigma_T(\eta, \gamma, \delta)} \quad \nu\text{-p.s.}$$

et ν n'est pas forcément réversible.

La continuité de $\rho_T(\eta_T^\gamma)$ signifie que lorsqu'une mesure est réversible ses probabilités conditionnelles sont raisonnables dans le sens où elles ne prennent pas trop en compte les interactions avec des sites éloignés. Selon les taux de transition, elles pourront éventuellement ne dépendre que d'un nombre fini de coordonnées. Cela se produit lorsque les taux sont supposés de plus proches voisins (définition 3.1.4). Dans la section 3.1.2, nous précisons comment nous pouvons en déduire qu'une mesure réversible est un champ de Markov.

3.1.2 Réversibilité et champs de Markov

Pour les systèmes de spins à taux strictement positifs et de plus proches voisins (définition 3.1.4), la proposition 2.7 p.192 chap.4 dans [36] montre que les mesures réversibles sont des champs de Markov. Dans cette partie, nous étendons ce résultat à des systèmes de particules sous une condition plus faible que la stricte positivité des taux. Il reste toutefois essentiel que les taux soient de plus proches voisins au sens suivant. Rappelons que $\overline{T} = T \cup N(T)$.

Définition 3.1.4 *Soit $c_T(\eta, \gamma)$ les taux d'un système de particules. Ces taux sont dits de plus proches voisins si pour tout T dans $\mathcal{P}_f(S)$, η dans X et γ dans X_T, $c_T(\eta, \gamma)$ ne dépend pas de $\eta(S \backslash \overline{T})$.*

Proposition 3.1.6 *Soit un système de particules de taux de plus proches voisins $c_T(\eta,\gamma)$. Supposons que pour tout T dans $\mathcal{P}_f(S)$, il existe une configuration γ dans X_T pour laquelle il existe un ensemble de chemins, indexé par δ dans X_T, $\{\sigma_T$ de δ à $\gamma, \delta \in X_T\}$ vérifiant la condition suivante*

$$\forall \eta \in X, \quad \sum_{\delta \in X_T} \left(\overline{\sigma_T(\eta,\delta,\gamma)} \prod_{\xi \neq \delta} \sigma_T(\eta,\xi,\gamma) \right) > 0 \ . \tag{3.23}$$

Si ν est réversible pour un tel système alors ν est un champ de Markov.

Démonstration. Soit T dans $\mathcal{P}_f(S)$ et γ la configuration de X_T qui vérifie (3.23). D'après la proposition 3.1.5 nous avons sous la condition (3.23)

$$\rho_T(\eta_T^\gamma) \quad = \quad \frac{\prod_{\xi \in X_T} \sigma_T(\eta,\xi,\gamma)}{\sum_{\delta \in X_T} \left(\overline{\sigma_T(\eta,\delta,\gamma)} \prod_{\xi \neq \delta} \sigma_T(\eta,\xi,\gamma) \right)} \quad \nu\text{-p.s.} \tag{3.24}$$

D'autre part, la caractérisation (3.17) indique que

$$\forall \xi \in X_T, \quad \rho_T(\eta_T^\xi)\sigma_T(\eta,\xi,\gamma) \quad = \quad \rho_T(\eta_T^\gamma)\overline{\sigma_T(\eta,\xi,\gamma)} \quad \nu\text{-p.s.} \tag{3.25}$$

et la condition (3.23) implique l'existence de δ dans X_T tel que

$$\forall \xi \neq \delta, \quad \sigma_T(\eta,\xi,\gamma) > 0 \ .$$

Ainsi pour tout $\xi \neq \delta$, (3.25) permet d'écrire

$$\rho_T(\eta_T^\xi) \quad = \quad \rho_T(\eta_T^\gamma) \, \frac{\overline{\sigma_T(\eta,\xi,\gamma)}}{\sigma_T(\eta,\xi,\gamma)} \quad \nu\text{-p.s.} \tag{3.26}$$

Enfin, nous avons

$$\rho_T(\eta_T^\delta) \quad = \quad 1 - \sum_{\xi \neq \delta} \rho_T(\eta_T^\xi) \ . \tag{3.27}$$

Pour tout η dans X, les probabilités conditionnelles $\rho_T(\eta)$ s'expriment donc en fonction des taux de transition à travers les quantités $\sigma_T(\eta,\zeta,\gamma)$, $\zeta \in X_T$ qui sont indépendantes de $\eta(S\backslash\overline{T})$. Ceci étant vrai pour tout T dans $\mathcal{P}_f(S)$, ν est un champ de Markov au sens de la définition 2.1.8 du chapitre 1.

∎

Il est facile de voir sur les égalités (3.24), (3.26), (3.27) que d'éventuelles propriétés de symétries des taux (par exemple pour $S = \mathbb{Z}^d$, l'invariance par translation au sens de [26] chap. 5 p. 84) sont héritées par les probabilités conditionnelles $\rho_T(\eta)$. En revanche, elles ne le sont pas forcément pour la mesure ν (voir exemple 5.33 chap. 3 p. 171 de [36] ou le cas des chaînes alternées pour le PP dans le chapitre 5).

Une condition un peu plus forte que (3.23) consiste à supposer l'existence, pour tout T dans $\mathcal{P}_f(S)$, de γ dans X_T tel que

$$\forall \xi \in X_T, \ \exists \sigma_T \text{ de } \xi \text{ à } \gamma \ , \ \forall \eta \in X, \qquad \sigma_T(\eta,\xi,\gamma) > 0 \tag{3.28}$$

Cette condition signifie que de tout ξ dans X_T il est possible d'atteindre une configuration de référence γ. Elle est équivalente à l'existence pour tout x dans S, d'un élément γ_x de B_x tel que

$$\forall \xi \in B_x, \exists \sigma_{\{x\}} \text{ de } \xi \text{ à } \gamma_x \ , \ \forall \eta \in X, \qquad \sigma_{\{x\}}(\eta, \xi, \gamma) > 0 \tag{3.29}$$

Cette dernière condition est clairement nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, il suffit de définir γ en posant $\gamma(x) = \gamma_x$ pour tout x dans T. De plus, en posant $w_o(x) = \gamma_x$ pour tout x dans S, on montre facilement en utilisant la caractérisation (3.17) que sous la condition (3.29), une mesure réversible pour le système de particules vérifie la condition "w_o" du chapitre 2 (voir section 2.2.7 pour une interprétation de cette condition). Dans ce même chapitre (section 2.3) nous avons vu que sous la condition "w_o", une mesure est de manière équivalente un champ de Markov, un système de plus proches voisins ou un système de cliques. Ceci est cohérent avec le résultat précédent.
Un exemple est le processus des philosophes qui vérifie (3.29) avec $\gamma_x = 0$ pour tout x dans S.

La réversibilité est un outil intéressant pour les modèles de ressources partagées que nous présentons dans le chapitre 4. Elle justifie la forme de l'équilibre de certains modèles et permet son calcul (voir la section 4.3). D'autres outils sont les techniques de comparaison stochastique et de couplage que nous envisageons en 3.2. Comme dans la partie précédente, il s'agit d'adapter ou de généraliser des outils classiques (pour les processus de Markov à espaces d'états dénombrables ou les systèmes de spins) à des systèmes de particules plus généraux.

3.2 Comparaison stochastique et couplage

La comparaison stochastique et les techniques de couplage font l'objet de développements divers. Des références générales sur ces questions sont par exemple Stoyan [48], Liggett [36] ou Lindvall [37]. Plus particulièrement, la section 1 du chapitre 2 de [36] est consacrée aux applications de ces notions aux systèmes de spins. Notre objectif est d'étendre ces résultats standards aux systèmes de particules que nous considérons dans ce chapitre. Nous donnons de nouvelles conditions de comparaison stochastique dont les utilisations sont diverses (voir par exemple [10] et la section 4.4 pour des applications aux modèles de ressources partagées).
Pour tout x dans S, nous supposons B_x muni d'un ordre partiel $\leq_x$. Pour tout sous-ensemble T de S, cet ordre s'étend de manière naturelle à un ordre partiel $\leq_T$ sur X_T,

$$\forall \alpha, \beta \in X_T, \qquad \alpha \leq_T \beta \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in T, \quad \alpha(x) \leq_x \beta(x) .$$

Dans la section 3.2.1, nous rappelons quelques définitions et résultats de base. Nous considérons ensuite deux façons d'obtenir des conditions de comparaison. La première consiste à adapter un résultat général de Massey [39] qui traite le cas des processus de Markov uniformisables sur des espaces d'états dénombrables partiellement ordonnés. Dans [39], des conditions nécessaires et suffisantes pour comparer deux tels processus sont données. Elles font intervenir les sous-ensembles croissants (voir définition 3.2.5 ci-dessous) de X et sont difficilement exploitables lorsque des espaces d'états infinis ou très grands sont considérés. Elles ne sont pas adaptées aux systèmes de particules car elles ne prennent pas en compte le caractère local des taux. Les conditions de comparaison que nous allons donner peuvent être qualifiées de locales car elles font intervenir les taux des processus T-locaux. Nos résultats principaux (propositions 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5) sont présentés dans la section 3.2.2. La proposition 3.2.3 donne des conditions suffisantes dans le cas général. La proposition 3.2.4 concerne les systèmes de type spin (définition 3.1.3). Elle montre que pour de tels systèmes les conditions suffisantes de la proposition 3.2.3 sont aussi nécessaires. Nous donnons également (proposition 3.2.5) le cas particulier des systèmes de spins avec migration, construits par superposition d'un système de spins et d'un processus de migration. Pour ces systèmes la proposition 3.2.3 s'applique mais les conditions suffisantes obtenues sont trop restrictives. Ce cas est cependant intéressant car il est possible de donner des conditions de comparaison nécessaires et suffisantes d'un type différent. Bien qu'elles soient exprimées en termes de taux locaux, les conditions des propositions 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5 comparent des sommes de taux et peuvent être difficiles à vérifier en pratique. Des conditions plus explicites qui comparent des taux deux à deux peuvent être données. Il est facile de montrer qu'elles impliquent les précédentes. Toutefois, elles peuvent aussi être retrouvées en utilisant une seconde méthode qui consiste à construire des couplages markoviens croissants en définissant leurs générateurs sur $X \times X$. Nous l'illustrons dans la section 3.2.3 où nous commençons par étudier une généralisation (introduite dans [10] et [24]) du couplage de Vasershtein (encore appelé couplage de base). Nous donnons des conditions suffisantes pour que le couplage soit croissant. Nous donnons également (proposition 3.2.7) des conditions d'existence de couplages markoviens croissants pour les systèmes de spins avec migration. Les conditions données dans la section 3.2.3 sont plus restrictives mais généralement plus facile à vérifier. Les points de vue développés dans les sections 3.2.2 et 3.2.3, comparaison stochastique et couplage markovien, ne sont pas indépendants. En conclusion de cette partie nous mentionnons des cas où ils sont équivalents.

3.2.1 Définitions et résultats de base

Nous noterons $\alpha <_T \beta$ pour signifier $\alpha \leq_T \beta$ et $\alpha \neq \beta$. Si $\alpha \leq_T \beta$ ou $\beta \leq_T \alpha$, α et β sont dits comparables pour l'ordre $\leq_T$. Nous écrirons alors $\alpha \sim_T \beta$ et $\alpha \not\sim_T \beta$ dans le cas contraire. Dans ces notations souvent nous ne préciserons plus l'indice T. L'ordre partiel sur X induit un ordre stochastique $\leq_{st}$ (dit "fort") sur l'ensemble des mesures de probabilité sur $(X, \mathcal{F})$. Dans ce qui suit $\mathcal{M}(X)$ est l'ensemble des fonctions continues sur X, croissantes pour l'ordre partiel $\leq_X$ sur X.

Définition 3.2.1 *Deux mesures de probabilité ν_1 et ν_2 sur $(X, \mathcal{F})$ vérifient $\nu_1 \leq_{st} \nu_2$ si*

$$\forall f \in \mathcal{M}(X) \quad , \quad \int f d\nu_1 \leq \int f d\nu_2 \ .$$

Nous souhaitons également pouvoir comparer des processus de Feller sur X. Une manière de le faire est de considérer des couplages croissants.

Définition 3.2.2 *Soit deux processus de Feller sur X de semi-groupes respectifs $\{S^1(t)\}$ et $\{S^2(t)\}$. Un couplage est un processus (η_t, ζ_t) sur $X \times X$ dont les processus marginaux η_t et ζ_t sont des processus de Markov sur X de semi-groupes respectifs $\{S^1(t)\}$ et $\{S^2(t)\}$. Un couplage est dit croissant si de plus, pour tout η, ζ dans X, $\eta \leq \zeta$ implique*

$$\forall t \geq 0 \ , \qquad P(\eta_t \leq \zeta_t \mid (\eta_0, \zeta_0) = (\eta, \zeta)) = 1 \ . \tag{3.30}$$

La comparaison de deux processus de Feller peut également s'écrire à l'aide de leurs semi-groupes. Il s'agit d'exprimer le fait que si des inégalités sont vraies à l'instant initial, elles le restent à tous les instants ultérieurs.

Définition 3.2.3 *Deux semi-groupes de Feller $\{S^1(t)\}$ et $\{S^2(t)\}$ vérifient*

$$\{S^1(t)\} \ \leq_{st} \ \{S^2(t)\}$$

si et seulement si pour toutes mesures de probabilité ν_1 et ν_2 sur $(X, \mathcal{F})$,

$$\nu_1 \leq_{st} \nu_2 \ \ \Rightarrow \ \ \forall t \geq 0 \ , \quad \nu_1 S^1(t) \leq_{st} \nu_2 S^2(t) \ . \tag{3.31}$$

Les caractérisations données dans les définitions 3.2.2 et 3.2.3 sont en fait équivalentes. La proposition 3.2.1 donne une troisième formulation.

Proposition 3.2.1 *Soit deux processus de Feller sur X de semi-groupes respectifs $\{S^1(t)\}$ et $\{S^2(t)\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Il existe un couplage croissant de $\{S^1(t)\}$ et $\{S^2(t)\}$.*
- (ii) $\{S^1(t)\} \leq_{st} \{S^2(t)\}$.
- (iii) $\eta \leq \zeta \Rightarrow \quad \forall t \geq 0, \ \forall f \in \mathcal{M}(X) \ , \quad S^1(t)f(\eta) \leq S^2(t)f(\zeta)$.

Démonstration. L'équivalence entre (i) et (ii) découle du théorème 2.4 chap.1 p.72 dans [36]. L'assertion (ii) implique (iii) car si $\eta \leq \zeta$ les mesures de Dirac δ_η et δ_ζ vérifient $\delta_\eta \leq_{st} \delta_\zeta$. Inversement, supposons (iii) vraie et $\nu_1 \leq_{st} \nu_2$. Le théorème de Strassen (voir aussi le théorème 2.4 chap.1 p.72 dans [36]) assure l'existence d'une mesure couplante ν sur $X \times X$ pour ν_1 et ν_2 qui vérifie

$$\nu(\eta \leq \zeta) = 1 \ .$$

Pour f dans $\mathcal{M}(X)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_X f d[\nu_2 S^2(t)] - \int_X f d[\nu_1 S^1(t)] &= \int_X S^2(t) f d[\nu_2] - \int_X S^1(t) f d[\nu_1] \\
&= \int\int_{X \times X} [S^2(t) f(\zeta) - S^1(t) f(\eta)] \nu[d\eta, d\zeta] \\
&= \int\int_{\{\eta \leq \zeta\}} [S^2(t) f(\zeta) - S^1(t) f(\eta)] \nu[d\eta, d\zeta] \ ,
\end{aligned}$$

qui est positif car $S^2(t)f(\zeta) - S^1(t)f(\eta)$ est positif pour toutes configurations $\eta \leq \zeta$.

■

Si les processus à comparer sont initialement dans des configurations η et ζ telles que $\eta \leq \zeta$, l'assertion (iii) signifie

$$\forall t \geq 0\ ,\ \forall f \in \mathcal{M}(X)\ , \qquad \mathbb{E}[f(\eta_t)] \leq \mathbb{E}[f(\zeta_t)]\ . \tag{3.32}$$

Lorsque l'on considère deux versions d'un même processus de Feller sur X ($S^1(t) = S^2(t)$), la propriété précédente peut être utilisée pour étudier l'évolution du processus partant de configurations initiales comparables. Ceci est lié à la propriété de monotonie du processus. Rappelons la définition 2.3 chap.1 p.72 dans [36] .

Définition 3.2.4 *Un processus de Feller sur X de semi-groupe $\{S(t)\}$ est dit monotone si pour toutes mesures de probabilité μ et ν sur $(X, \mathcal{F})$,*

$$\mu \leq_{st} \nu \qquad \Rightarrow \qquad \forall t \geq 0,\ \mu S(t) \leq_{st} \nu S(t)\ . \tag{3.33}$$

Dans le cadre que nous envisageons, un couplage n'est pas nécessairement un processus de Markov sur $X \times X$. Les couplages markoviens peuvent être construits explicitement en donnant leurs générateurs sur $X \times X$. Les taux d'un tel couplage dépendent des taux des processus à comparer. Si les taux sont nuls pour les transitions qui feraient sortir de l'ensemble $K = \{(\eta, \zeta) \in X \times X, \eta \leq \zeta\}$, alors le couplage est croissant. Nous l'illustrons dans la section 3.2.3 . Dans la section 3.2.2 nous donnons des conditions de comparaison de semi-groupes au sens de la définition 3.2.3 . Ces conditions assurent l'existence d'un couplage croissant (pas nécessairement markovien) sans le construire explicitement.

3.2.2 Conditions locales de comparaison stochastique

Soit un processus de Markov $\{\eta_t, t \geq 0\}$ sur un espace d'états X dénombrable. Notons $\{c(\eta, \gamma), \eta, \gamma \in X\}$ ses taux de transitions définis par

$$\begin{aligned} \forall \eta, \gamma \in X \text{ avec } \eta \neq \gamma, \quad c(\eta, \gamma) &= \lim_{t \searrow 0} P(\eta_t = \gamma \mid \eta_0 = \eta)/t\ , \\ \forall \eta \in X, \quad c(\eta, \eta) &= -\sum_{\gamma \neq \eta} c(\eta, \gamma)\ . \end{aligned}$$

Un tel processus est dit uniformisable (*cf.* [29]) si ses taux vérifient

$$\sup_{\eta \in X} |c(\eta, \eta)| < \infty\ .$$

C'est en particulier clairement le cas lorsque X est fini.

Conditions suffisantes locales

Massey [39] donne des conditions nécessaires et suffisantes pour comparer des processus de Markov uniformisables sur un espace d'états X dénombrable et partiellement ordonné. Ces conditions font intervenir les taux de transition des processus et les sous-ensembles croissants de X.

Définition 3.2.5 *Un sous-ensemble Γ de X est croissant s'il vérifie*

$$\eta \in \Gamma \text{ et } \eta \leq \zeta \quad \Rightarrow \quad \zeta \in \Gamma \ .$$

Il est décroissant s'il vérifie

$$\eta \in \Gamma \text{ et } \eta \geq \zeta \quad \Rightarrow \quad \zeta \in \Gamma \ .$$

La proposition 3.2.2 rappelle le théorème de Massey (5.3 p. 359 dans [39]).

Proposition 3.2.2 *Soit deux processus de Markov uniformisables sur X dénombrable partiellement ordonné, de taux $\{c^i(\eta,\gamma), \eta, \gamma \in X\}$ et de semi-groupes $\{S^i(t)\}$ ($i = 1,2$). Ils vérifient*

$$\{S^1(t)\} \leq_{st} \{S^2(t)\}$$

si et seulement si pour toutes configurations η, ζ dans X avec $\eta \leq \zeta$ et tout sous-ensemble croissant Γ tel que $\eta \in \Gamma$ ou $\zeta \notin \Gamma$,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} c^1(\eta,\gamma) \quad \leq \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} c^2(\zeta,\gamma) \quad . \tag{3.34}$$

Pour de grands ensembles X partiellement ordonnés, les sous-ensembles croissants sont généralement difficiles à énumérer de sorte que la condition (3.34) est difficile à vérifier. Le théorème de Massey n'est pas d'une grande utilité lorsque S est infini ou fini mais très grand. Pour les systèmes que nous considérons, il est intéressant de tenir compte du caractère local des taux. La dynamique de ces systèmes est une superposition de dynamiques locales précisées par des taux $c^i_T(\eta,\gamma)$ où les sous-ensembles T sont généralement beaucoup plus petits que S. Dans les systèmes de spins, par exemple, ce sont des singletons. Dans la proposition 3.2.3, des conditions qui prennent en compte la localité des taux sont données. Ce sont des conditions suffisantes sous lesquelles deux systèmes de particules peuvent être comparés.

Proposition 3.2.3 *Soit deux systèmes de particules de taux $c^i_T(\eta,\gamma)$ et de semi-groupes $\{S^i(t)\}$ ($i = 1,2$). Si pour tout T dans $\mathcal{P}_f(S)$, tout η, ζ dans X avec $\eta \leq \zeta$,*

(a) *pour tout sous-ensemble croissant Γ_T de X_T tel que $\eta(T) \notin \Gamma_T$ et $\zeta(T) \notin \Gamma_T$,*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_T} c^1_T(\eta,\gamma) \quad \leq \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_T} c^2_T(\zeta,\gamma) \tag{3.35}$$

(b) *pour tout sous-ensemble décroissant Γ_T de X_T tel que $\eta(T) \notin \Gamma_T$ et $\zeta(T) \notin \Gamma_T$,*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_T} c^1_T(\eta,\gamma) \quad \geq \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_T} c^2_T(\zeta,\gamma) \tag{3.36}$$

alors $\{S^1(t)\} \leq_{st} \{S^2(t)\}$.

Démonstration. Pour simplifier l'écriture de la démonstration, nous rassemblons les conditions (3.35) et (3.36) sous la forme (3.37) suivante plus compacte. Nous avons pour cela posé, pour tout sous-ensemble fini T de S et $i = 1, 2$,

$$c_T^i(\eta, \eta(T)) = - \sum_{\gamma \neq \eta(T)} c_T^i(\eta, \gamma) \, .$$

Pour tout T dans $\mathcal{P}_f(S)$, pour tout η, ζ dans X avec $\eta \leq \zeta$ et pour tout sous-ensemble croissant Γ_T de X_T tel que $\eta(T) \in \Gamma_T$ ou $\zeta(T) \notin \Gamma_T$,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_T} c_T^1(\eta, \gamma) \quad \leq \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_T} c_T^2(\zeta, \gamma) \, . \tag{3.37}$$

Nous commençons par montrer la proposition 3.2.3 dans le cas où S est fini en utilisant la proposition 3.2.2. Nous étendons au cas S infini à l'aide d'une technique d'approximations finies. Si S est fini, X l'est également. Supposons (3.37) et considérons un sous-ensemble T

de S. Pour tout sous-ensemble croissant Γ de X tel que $\eta \in \Gamma$ ou $\zeta \notin \Gamma$, nous définissons respectivement les sous-ensembles Γ_T^η et Γ_T^ζ de X_T par

$$\Gamma_T^\eta \;=\; \{\gamma \in X_T \, , \, \eta_T^\gamma \in \Gamma\} \quad \text{et} \quad \Gamma_T^\zeta \;=\; \{\gamma \in X_T \, , \, \zeta_T^\gamma \in \Gamma\} \, .$$

Ces ensembles sont croissants. En appliquant (3.37) avec $\Gamma_T = \Gamma_T^\eta$ et en remarquant que $\Gamma_T^\eta \subset \Gamma_T^\zeta$, nous obtenons

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_T^\eta} c_T^1(\eta, \gamma) \quad \leq \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_T^\zeta} c_T^2(\zeta, \gamma) \, , \tag{3.38}$$

pour tout η, ζ dans X avec $\eta \leq \zeta$ et tout sous-ensemble croissant Γ de X tel que $\eta \in \Gamma$ ou $\zeta \notin \Gamma$. Par la proposition 3.2.2, ceci est équivalent à

$$\{S_T^1(t)\} \quad \leq_{st} \quad \{S_T^2(t)\}$$

où les $\{S_T^i(t)\}$ $(i = 1, 2)$ sont les semi-groupes des processus T-locaux. Ceci étant vrai pour tous les sous-ensembles T de S, en sommant (3.38) sur T nous obtenons (3.34) et donc

$$\{S^1(t)\} \quad \leq_{st} \quad \{S^2(t)\} \, .$$

Lorsque S est fini, pour comparer des systèmes de particules sur S, il suffit donc de vérifier les conditions (3.37) pour tous les sous-ensembles T de S. Pour montrer que ceci reste vrai lorsque S est infini, nous introduisons (définition 3.2.6) la notion de processus gelé analogue à la notion d'approximation finie telle qu'elle est présentée pour les systèmes de spins dans [36] chap.3 p.138.

Définition 3.2.6 *Soit un système de particules sur S de taux*

$$\{c_T(\eta, \gamma), \, \eta \in X, \, T \in \mathcal{P}_f(S), \, \gamma \in X_T\} \, .$$

Soit V un sous-ensemble fini de S et η dans X. Le processus gelé à η sur $S \backslash V$ est le système de particules sur S de taux

$$\{c_T(\eta_V^{\alpha(V)}, \gamma) \, , \, \alpha \in X \, , \, T \subset V \, , \, \gamma \in X_T\} \, .$$

Le lemme 3.2.1 ci-dessous montre qu'il suffit de comparer des processus gelés pour une famille de sous-ensembles finis croissant vers S. Il faut toutefois noter que la condition (3.39) du lemme est en fait plus faible que de dire que les processus gelés sont comparables.

Lemme 3.2.1 *Soit deux systèmes de particules sur S de taux $c^i_T(\eta,\gamma)$ $(i = 1,2)$. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles finis croissant vers S. Pour tout n et tout η dans X, nous notons $\{S^i_{n,\eta}(t)\}$ le semi-groupe du processus gelé à η sur $S\backslash T_n$. Si pour tout $\eta \leq \zeta$ et tout n,*

$$\forall f \in \mathcal{M}(X)\ , \quad S^1_{n,\eta}(t)f(\eta) \ \leq \ S^2_{n,\zeta}(t)f(\zeta) \tag{3.39}$$

alors $\{S^1(t)\} \ \leq_{st} \ \{S^2(t)\}$.

Démonstration. Pour tout n et tout η dans X, notons $\Omega^i_{n,\eta}$ le générateur du processus gelé à η sur $S\backslash T_n$. Il est facile de vérifier que

$$\forall f \in \mathcal{D},\ \forall \eta \in X\ , \quad \lim_{n\to\infty} \Omega^i_{n,\eta} f \ = \ \Omega^i f\ .$$

Par le théorème 2.12 dans [36], ceci implique

$$\forall f \in \mathcal{C}(X),\ \forall \eta \in X\ , \quad \lim_{n\to\infty} S^i_{n,\eta}(t) f \ = \ S^i(t) f\ , \tag{3.40}$$

uniformément pour t dans des ensembles compacts. Soit $\eta \leq \zeta$. Si pour tout n,

$$\forall f \in \mathcal{M}(X)\ , \quad S^1_{n,\eta}(t)f(\eta) \ \leq \ S^2_{n,\zeta}(t)f(\zeta)\ ,$$

par passage à la limite nous avons

$$\forall f \in \mathcal{M}(X)\ , \quad S^1(t)f(\eta) \ \leq \ S^2(t)f(\zeta)\ .$$

Par la proposition 3.2.1 ceci prouve que $\{S^1(t)\} \leq_{st} \{S^2(t)\}$.

■

Les processus gelés sont des processus sur S mais peuvent être identifiés à des processus sur des sous-ensembles finis de S. Le processus gelé à η sur $S\backslash V$ peut être associé au système de particules sur V dont les taux sont

$$\{c_T(\eta^\alpha_V,\gamma),\ \alpha \in X_V,\ T \subset V,\ \gamma \in X_T\}\ .$$

De plus, il est facile de voir que l'inégalité (3.39) entre processus gelés peut être obtenue en comparant les processus correspondants sur T_n. La démonstration de la proposition 3.2.3 pour S infini se termine alors comme suit. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles finis croissant vers S. Pour tout n, nous considérons les processus gelés à η et $zeta$ sur T_n de semi-groupes $\{S^1_{n,\eta}(t)\}$ et $\{S^2_{n,\zeta}(t)\}$. L'ensemble T_n étant fini et (3.37) vérifiée pour tout sous-ensemble T de T_n, nous pouvons utiliser la première partie de la preuve avec $S = T_n$ pour montrer que pour tout $\eta \leq \zeta$,

$$\forall f \in \mathcal{M}(X), \quad S^1_{n,\eta}(t)f(\eta) \ \leq \ S^2_{n,\zeta}(t)f(\zeta)\ .$$

Le lemme 3.2.1 permet de conclure.

■

Dans ce qui suit, nous considérons des cas particuliers pour lesquels la proposition 3.2.3 peut être améliorée dans le sens où les conditions suffisantes (3.35) et (3.36) se révèlent être également nécessaires.

Conditions nécessaires et suffisantes pour les systèmes de type spin

Dans les systèmes de type spin (définition 3.1.3), un seul site peut changer d'état à la fois. Comme dans la partie 3.1, les taux non nuls $c^i_{\{x\}}(\eta,\gamma)$ sont réécrits $c^i(x,\eta,\gamma)$.

Proposition 3.2.4 *Soit deux systèmes de type spin de taux* $c^i(x,\eta,\gamma)$ *et de semi-groupes* $\{S^i(t)\}$ *(*$i = 1, 2$*). Ils vérifient* $\{S^1(t)\} \leq_{st} \{S^2(t)\}$ *si et seulement si pour tout* x *dans* S*, tout* η, ζ *dans* X *avec* $\eta \leq \zeta$*,*

(a) *pour tout sous-ensemble croissant* Γ_x *de* B_x *tel que* $\eta(x) \notin \Gamma_x$ *et* $\zeta(x) \notin \Gamma_x$ *,*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_x} c^1(x,\eta,\gamma) \quad \leq \quad \sum_{\gamma\in\Gamma_x} c^2(x,\zeta,\gamma)$$

(b) *pour tout sous-ensemble décroissant* Γ_x *de* B_x *tel que* $\eta(x) \notin \Gamma_x$ *et* $\zeta(x) \notin \Gamma_x$ *,*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_x} c^1(x,\eta,\gamma) \quad \geq \quad \sum_{\gamma\in\Gamma_x} c^2(x,\zeta,\gamma) \; .$$

Démonstration. Supposons $\{S^1(t)\} \leq_{st} \{S^2(t)\}$. Soit x dans S et η, ζ dans X tels que $\eta \leq \zeta$. Soit Γ_x un sous-ensemble croissant de B_x tel que $\eta(x) \notin \Gamma_x$ et $\zeta(x) \notin \Gamma_x$. Considérons la fonction indicatrice sur X,

$$g = \mathbb{1}_{\{\xi(x)\in\Gamma_x\}} \; .$$

La fonction g est dans $\mathcal{M}(X)$ car Γ_x est croissant. Elle est dans $\mathcal{D}$ puisqu'elle ne dépend que de l'état du site x. Pour $i = 1, 2$ les générateurs des processus vérifient pour tout f dans $\mathcal{D}$ et tout η dans X,

$$\Omega^i f(\eta) \quad = \quad \lim_{t\searrow 0}(S^i(t)f(\eta) - f(\eta))/t \; .$$

Puisque $g(\eta) = g(\zeta) = 0$ et $S^1(t)g(\eta) \leq S^2(t)g(\zeta)$ il vient $\Omega^1 g(\eta) \leq \Omega^2 g(\zeta)$. Il est alors facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \Omega^1 g(\eta) \quad &= \quad \sum_{\gamma\in\Gamma_x} c^1(x,\eta,\gamma) \; , \\ \Omega^2 g(\zeta) \quad &= \quad \sum_{\gamma\in\Gamma_x} c^2(x,\zeta,\gamma) \; , \end{aligned}$$

et (a) est satisfaite. La démonstration est analogue pour (b) avec Γ_x décroissant et

$$g \;=\; \mathbb{1}_{\{\xi(x)\notin\Gamma_x\}} \quad .$$

La réciproque est une application directe de la proposition 3.2.3.

■

Plus généralement, le même résultat est vrai si les ensembles T affectés par les transitions sont disjoints.

Nous présentons maintenant un cas où la proposition 3.2.3 s'applique mais débouche sur des conditions trop restrictives. Dans ce cas, il est pourtant possible de donner des conditions nécessaires et suffisantes qui sont d'un type différent et illustrent une autre façon d'utiliser le théorème de Massey.

Conditions nécessaires et suffisantes pour les systèmes de spins avec migration

Un système de spins avec migration sur S est un système de particules sur $X = \{0,1\}^S$, construit par superposition d'un système de spins et d'un système d'échange. Un système d'échange peut être vu comme une généralisation du processus d'exclusion présenté dans le chapitre 8 de [36]. Dans un système d'échange, seules sont autorisées les transitions sur des paires de sites avec des spins différents. L'échange de deux spins identiques ne modifie en fait pas la configuration courante. Plus précisément, les taux d'un système d'échange vérifient

$$\begin{aligned} c_T(\eta,\gamma) &= 0 \quad \text{si } |T| \neq 2 \\ c_{\{x,y\}}(\eta,\gamma) &= 0 \quad \text{si } \eta(x)=\eta(y) \text{ ou } \gamma(x)\neq\eta(y) \text{ ou } \gamma(y)\neq\eta(x). \end{aligned}$$

Pour simplifier, nous écrivons les taux non nuls $c(xy,\eta)$ plutôt que $c_{\{x,y\}}(\eta,(\eta(y),\eta(x)))$. Nous notons aussi $\mathcal{S}(x)$ l'ensemble des sites qui peuvent échanger leur spin avec x,

$$\mathcal{S}(x) = \{y \in S,\ \sup_{\eta\in X} c(xy,\eta) > 0\}.$$

En superposant à un système d'échange, un système de spins dont les taux sont notés $c(x,\eta)$, nous obtenons un système de spins avec migration dont les taux sont notés $\{c(x,\eta), c(xy,\eta)\}$. Une application intéressante de ces systèmes concerne les processus de contact avec migration (*cf.* [25]). Toutefois dans cette section, nous donnons simplement des conditions nécessaires et suffisantes de comparaison de deux systèmes de spins avec migration. Pour tout x dans S, les ensembles $\mathcal{S}(x)$ sont supposés finis et égaux pour les deux processus à comparer. Nous introduisons les notations suivantes. Pour $j = 0,1$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_j(x,\eta,\zeta) &= \{y \in \mathcal{S}(x) \text{ t.q. } \eta(y)=\zeta(y)=j\}\ , \\ \text{et}\quad \mathcal{V}_j(x,\eta) &= \{y \in \mathcal{S}(x) \text{ t.q. } \eta(y)=j\}\ . \end{aligned}$$

Proposition 3.2.5 *Soit deux systèmes de spins avec migration, de taux* $\{c^i(x,\eta), c^i(xy,\eta)\}$ *et de semi-groupes* $\{S^i(t)\}$ $(i=1,2)$*. Ils vérifient* $\{S^1(t)\} \leq_{st} \{S^2(t)\}$ *si et seulement si pour tout* η,ζ *dans* X *avec* $\eta \leq \zeta$*,*

$\forall x \in S,\ \eta(x)=\zeta(x)=0,\quad$ *et* $\forall\ V \subset \mathcal{V}_1(x,\eta,\zeta)$,

$$c^1(x,\eta) + \sum_{y\in\mathcal{V}_1(x,\eta)\setminus V} c^1(xy,\eta) \ \leq\ c^2(x,\zeta) + \sum_{y\in\mathcal{V}_1(x,\zeta)\setminus V} c^2(xy,\zeta) \tag{3.41}$$

$\forall x \in S,\ \eta(x)=\zeta(x)=1,\quad$ *et* $\forall\ V \subset \mathcal{V}_0(x,\eta,\zeta)$,

$$c^1(x,\eta) + \sum_{y\in\mathcal{V}_0(x,\eta)\setminus V} c^1(xy,\eta) \ \geq\ c^2(x,\zeta) + \sum_{y\in\mathcal{V}_0(x,\zeta)\setminus V} c^2(xy,\zeta) \tag{3.42}$$

Démonstration. Montrons d'abord que les conditions (3.41) et (3.42) sont nécessaires. Supposons $\{S^1(t)\} \leq_{st} \{S^2(t)\}$. Soit η,ζ dans X tels que $\eta \leq \zeta$ et x dans S tel que $\eta(x) = \zeta(x) = 0$. Soit V un sous-ensemble de $\mathcal{V}_1(x,\eta,\zeta)$. Considérons la fonction indicatrice sur X

$$g(\xi) = \xi(x) \prod_{y\in V} \xi(y)\ .$$

La fonction g est dans $\mathcal{M}(X)$. Elle est dans $\mathcal{D}$ car elle ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées. Pour $i = 1, 2$ les générateurs des processus vérifient pour toute fonction f dans $\mathcal{D}$ et tout η dans X,

$$\Omega^i f(\eta) = \lim_{t \searrow 0} (S^i(t)f(\eta) - f(\eta))/t \ .$$

Si $\eta(x) = \zeta(x) = 0$, alors $g(\eta) = g(\zeta) = 0$. De $S^1(t)g(\eta) \leq S^2(t)g(\zeta)$ nous déduisons donc $\Omega^1 g(\eta) \leq \Omega^2 g(\zeta)$. Il est alors facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \Omega^1 g(\eta) &= c^1(x, \eta) + \sum_{y \in \mathcal{V}_1(x,\eta) \setminus V} c^1(xy, \eta) \ , \\ \Omega^2 g(\zeta) &= c^2(x, \zeta) + \sum_{y \in \mathcal{V}_1(x,\zeta) \setminus V} c^2(xy, \zeta) \ , \end{aligned}$$

et (3.41) est satisfaite. La condition (3.42) se démontre de manière analogue.

La réciproque se démontre en deux étapes. Nous utilisons le théorème de Massey (proposition 3.2.2) pour montrer que les conditions (3.41) et (3.42) sont suffisantes quand S est fini. Le résultat est ensuite étendu au cas S infini à l'aide d'une technique d'approximations finies. Soit donc S fini. Rappelons que dans les notations de Liggett η_x est la configuration η changée au site x en $1 - \eta(x)$ et notons η_{xy} la configuration obtenue lorsque les spins des sites x et y sont échangés. Pour tout sous-ensemble Γ de X, nous définissons pour $j = 0, 1$

$$\begin{aligned} \Gamma_j(\eta, \zeta) &= \{x \in S, \ \eta(x) = \zeta(x) = j, \ \eta_x \in \Gamma\} \\ \Gamma_j(x, \eta) &= \{y \in \mathcal{S}(x), \ \eta(y) = j, \ \eta_{xy} \in \Gamma\} \ . \end{aligned}$$

Montrons que les conditions (3.41) et (3.42) impliquent respectivement les conditions (3.43) et (3.44) suivantes.

Pour tout η, ζ dans X avec $\eta \leq \zeta$,

pour tout sous-ensemble croissant Γ de X tel que $\eta \notin \Gamma$ et $\zeta \notin \Gamma$,

$$\sum_{x \in \Gamma_0(\eta,\zeta)} \left(c^1(x, \eta) + \sum_{y \in \Gamma_1(x,\eta)} c^1(xy, \eta) \right) \leq \sum_{x \in \Gamma_0(\zeta,\eta)} \left(c^2(x, \zeta) + \sum_{y \in \Gamma_1(x,\zeta)} c^2(xy, \zeta) \right) \qquad (3.43)$$

pour tout sous-ensemble décroissant Γ de X tel que $\eta \notin \Gamma$ et $\zeta \notin \Gamma$,

$$\sum_{x \in \Gamma_1(\eta,\zeta)} \left(c^1(x, \eta) + \sum_{y \in \Gamma_0(x,\eta)} c^1(xy, \eta) \right) \geq \sum_{x \in \Gamma_1(\zeta,\eta)} \left(c^2(x, \zeta) + \sum_{y \in \Gamma_0(x,\zeta)} c^2(xy, \zeta) \right) \qquad (3.44)$$

Soit $\eta \leq \zeta$ et Γ un sous-ensemble croissant tel que $\eta \notin \Gamma$ et $\zeta \notin \Gamma$. Nous pouvons appliquer la condition (3.41) en prenant x dans $\Gamma_0(\eta, \zeta)$ et

$$V = \{y \in \mathcal{S}(x), \ \eta(y) = \zeta(y) = 1, \ \eta_{xy} \notin \Gamma\} \ .$$

Nous obtenons

$$\mathcal{V}_1(x,\eta)\backslash V = \{y \in \mathcal{S}(x),\ \eta(y) = \zeta(y) = 1,\ \eta_{xy} \in \Gamma\} = \Gamma_1(x,\eta)\ ,$$

et

$$\mathcal{V}_1(x,\zeta)\backslash V \subset \Gamma_1(x,\zeta)\ .$$

Pour montrer cette dernière inclusion, considérons y dans $\mathcal{V}_1(x,\zeta)\backslash V$. Nous avons $\zeta(y) = 1$ mais $\eta(y)$ peut valoir 0 ou 1. Si $\eta(y) = 0$ alors $\eta_x \leq \zeta_{xy}$. Or $x \in \Gamma_0(\eta,\zeta)$ et nous avons donc $\eta_x \in \Gamma$, d'où nous déduisons $\zeta_{xy} \in \Gamma$ car Γ est croissant. Si $\eta(y) = 1$ alors $\eta_{xy} \in \Gamma$ car $y \notin V$. Il découle de $\eta_{xy} \leq \zeta_{xy}$ que $\zeta_{xy} \in \Gamma$. Dans les deux cas, $\zeta_{xy} \in \Gamma$ et y est dans $\Gamma_1(x,\zeta)$.
En appliquant la condition (3.41), il vient pour tout x dans $\Gamma_0(\eta,\zeta)$,

$$c^1(x,\eta) + \sum_{y\in\Gamma_1(x,\eta)} c^1(xy,\eta) \quad \leq \quad c^2(x,\zeta) + \sum_{y\in\mathcal{V}_1(x,\zeta)\backslash V} c^2(xy,\zeta)$$

et donc

$$c^1(x,\eta) + \sum_{y\in\Gamma_1(x,\eta)} c^1(xy,\eta) \quad \leq \quad c^2(x,\zeta) + \sum_{y\in\Gamma_1(x,\zeta)} c^2(xy,\zeta)\ .$$

En sommant sur les x dans $\Gamma_0(\eta,\zeta)$, nous obtenons

$$\sum_{x\in\Gamma_0(\eta,\zeta)} \left(c^1(x,\eta) + \sum_{y\in\Gamma_1(x,\eta)} c^1(xy,\eta)\right) \quad \leq \quad \sum_{x\in\Gamma_0(\eta,\zeta)} \left(c^2(x,\zeta) + \sum_{y\in\Gamma_1(x,\zeta)} c^2(xy,\zeta)\right)\ .$$

La condition (3.43) en découle en notant que $\Gamma_0(\eta,\zeta) \subset \Gamma_0(\zeta,\eta)$.
Des développements analogues permettent de montrer que (3.42) implique (3.44). Nous pouvons alors conclure en remarquant que les conditions (3.43) et (3.44) sont celles de la proposition 3.2.2 écrites pour les systèmes de spins avec migration.

Ceci achève la démonstration de notre résultat lorsque S est fini. Si S est infini, considérons des ensembles finis T_n croissant vers S. Pour chacun des T_n, (3.41) et (3.42) sont vérifiées pour tout x dans T_n et nous pouvons comparer les processus gelés correspondants. Comme nous l'avons déjà mentionné dans la démonstration de la proposition 3.2.3, cela implique $\{S^1(t)\} \leq_{st} \{S^2(t)\}$.

■

Les conditions de la proposition 3.2.5 s'appliquent au processus de contact avec migration. Le processus de contact simple est défini par

$$\begin{array}{rcll} c(x,\eta) & = & 1 & \text{si } \eta(x) = 1 \\ c(x,\eta) & = & \lambda \sum_{y\in N(x)} \eta(y) & \text{si } \eta(x) = 0\ . \end{array}$$

Il peut modéliser la propagation d'un virus sur un ensemble de sites. Ajouter de la migration à ce processus revient à considérer des taux $c(xy,\eta)$ non nuls. Il est naturel de penser que dans un processus de contact avec migration le virus se propagera plus rapidement que dans un processus de contact simple. Toutefois ce résultat ne se démontre pas facilement (*cf.* [25]). Les conditions de la proposition 3.2.5 montrent qu'un processus de contact avec migration ne peut être minoré stochastiquement par un processus de contact de même taux de mort.

En effet, si nous posons $c^1(x,\eta) = c^2(x,\eta)$ lorsque $\eta(x) = 1$ et $c^1(xy,\eta) = 0$, l'équation (3.42) implique $c^2(xy,\eta) = 0$. En revanche, il est possible de majorer un processus de contact avec migration par un processus de contact simple de même taux de mort en modifiant les taux de naissance (voir [25]). Pour retrouver ce résultat, les conditions simplifiées que nous donnons dans la proposition 3.2.7 suffisent.

Les conditions que nous avons obtenues dans les propositions 3.2.3 et 3.2.4 peuvent être difficiles à vérifier car elles comparent des sommes de taux. Dans la section suivante nous donnons des conditions qui reposent sur la comparaison de taux deux par deux. Ces conditions sont plus fortes dans le sens où elles assurent l'existence d'un couplage croissant markovien. Nous donnons également un couplage markovien pour les systèmes de spins avec migration.

3.2.3 Couplages markoviens croissants

Dans cette section nous nous intéressons à la construction explicite de couplages markoviens pour les systèmes de particules. De cette manière nous obtenons des conditions de comparaison plus exploitables.

Définition 3.2.7 *Un couplage markovien croissant est un processus de Markov (η_t, ζ_t) sur $X \times X$ qui réalise un couplage croissant au sens de la définition 3.2.2.*

Généralisation du couplage de Vasershtein

Le couplage de Vasershtein encore appelé couplage de base est décrit dans [36], chap.3 p.125. Il concerne les systèmes de spins. Des conditions nécessaires et suffisantes sous lesquelles ce couplage est croissant sont données dans [36]. Ici, nous donnons une généralisation de ce couplage à des ensembles B_x finis partiellement ordonnés, ainsi que des conditions sous lesquelles le couplage est croissant.

Considérons deux systèmes de particules de taux $c^i_T(\eta,\gamma)$ et de générateurs Ω^i définis comme en (3.1) ($i = 1, 2$). Définissons le générateur suivant $\widetilde{\Omega}$ sur l'ensemble $\widetilde{\mathcal{D}}$ des fonctions cylindriques $f(\eta,\zeta)$ sur $X \times X$,

$$\forall f \in \widetilde{\mathcal{D}}\ ,\ \forall \eta, \zeta \in X\ , \quad \widetilde{\Omega} f(\eta,\zeta) \;=\; \sum_{T \in \mathcal{P}_f(S)} \widetilde{\Omega}_T f(\eta,\zeta)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \widetilde{\Omega}_T f(\eta,\zeta) \;&=\; \sum_{\gamma \in X_T} \min(c^1_T(\eta,\gamma), c^2_T(\zeta,\gamma))\,[f(\eta^\gamma_T, \zeta^\gamma_T) - f(\eta,\zeta)] \\ &+\; \sum_{\gamma \in X_T} [c^1_T(\eta,\gamma) - \min(c^1_T(\eta,\gamma), c^2_T(\zeta,\gamma))]\,[f(\eta^\gamma_T,\zeta) - f(\eta,\zeta)] \\ &+\; \sum_{\gamma \in X_T} [c^2_T(\zeta,\gamma) - \min(c^1_T(\eta,\gamma), c^2_T(\zeta,\gamma))]\,[f(\eta,\zeta^\gamma_T) - f(\eta,\zeta)] \quad . \end{aligned} \tag{3.45}$$

Il est facile de vérifier pour $f(\eta,\zeta) = g(\eta)$ et $f(\eta,\zeta) = g(\zeta)$ que $\widetilde{\Omega} f(\eta,\zeta) = \Omega^1 g(\eta)$ et $\widetilde{\Omega} f(\eta,\zeta) = \Omega^2 g(\zeta)$ respectivement. Ainsi $\widetilde{\Omega}$ définit un couplage markovien des deux systèmes. La proposition 3.2.6 donne des conditions suffisantes sous lesquelles ce couplage est croissant.

Proposition 3.2.6 *Soit deux systèmes de particules de taux $c_T^i(\eta,\gamma)$ et de générateurs Ω^i définis en (3.1) $(i=1,2)$. Si leurs taux vérifient pour tout T dans $\mathcal{P}_f(S)$ et tout η,ζ dans X tels que $\eta \leq \zeta$,*

$$\gamma > \zeta(T) \text{ ou } \gamma \not\sim \zeta(T) \;\Rightarrow\; c_T^1(\eta,\gamma) \leq c_T^2(\zeta,\gamma) \tag{3.46}$$
$$\gamma < \eta(T) \text{ ou } \gamma \not\sim \eta(T) \;\Rightarrow\; c_T^1(\eta,\gamma) \geq c_T^2(\zeta,\gamma) \tag{3.47}$$

alors $\tilde{\Omega}$ défini en (3.45) est le générateur d'un couplage markovien croissant des deux systèmes.

Démonstration. Notons A l'ensemble $\{f \in \mathcal{C}(X\times X),\ f(\eta,\zeta)\geq 0,\ f(\eta,\zeta)=0 \text{ si } \eta \leq \zeta\}$. Soit $\{S(t)\}$ le semi-groupe associé à $\tilde{\Omega}$. Pour montrer que le couplage est croissant, il suffit de vérifier (voir [36] chap.3 p.127)

$$f \in A \;\Rightarrow\; S(t)f \in A \quad . \tag{3.48}$$

Soit h un fonction positive de $\tilde{\mathcal{D}}$ et (η,ζ) un point de $K=\{(\eta,\zeta)\in X\times X,\ \eta \leq \zeta\}$ où h atteint son maximum sur K. Pour montrer (3.48), il suffit de montrer que $\tilde{\Omega}h(\eta,\zeta)$ est négatif. Or si $\eta\leq\zeta$ alors $\eta_T^\gamma \leq \zeta_T^\gamma$ pour tout γ dans X_T et la première somme dans (3.45) est négative. En ce qui concerne la deuxième somme, il nous faut distinguer deux cas,

$$\begin{array}{lll} (i) & \gamma \leq \zeta(T) & \Rightarrow\; (\eta_T^\gamma,\zeta)\in K \\ (ii) & \gamma > \zeta(T) \text{ ou } \gamma \not\sim \zeta(T) & \Rightarrow\; (\eta_T^\gamma,\zeta)\notin K\ . \end{array}$$

De la même manière, pour la troisième somme,

$$\begin{array}{lll} (i)' & \eta(T) \leq \gamma & \Rightarrow\; (\eta,\zeta_T^\gamma)\in K \\ (ii)' & \gamma < \eta(T) \text{ ou } \gamma \not\sim \eta(T) & \Rightarrow\; (\eta,\zeta_T^\gamma)\notin K\ . \end{array}$$

Dans les cas (i) et $(i)'$, les termes sont toujours négatifs mais pas nécessairement dans les cas (ii) et $(ii)'$. Les conditions de la proposition 3.2.6 assurent la nullité de ces termes.

■

Il est facile de vérifier que les conditions de la proposition 3.2.6 impliquent les conditions (3.35) et (3.36). Fixons pour cela T dans $\mathcal{P}_f(S)$ et considérons Γ_T un sous-ensemble croissant de X_T tel que $\eta(T)\notin\Gamma_T$ et $\zeta(T)\notin\Gamma_T$. Si γ est dans Γ_T, alors γ ne peut pas être inférieur à $\zeta(T)$ car $\zeta(T)$ n'appartient pas à Γ_T. Ainsi

$$\Gamma_T \;\subset\; \{\gamma\in X_T, \gamma > \zeta(T) \text{ ou } \gamma \not\sim \zeta(T)\}\ ,$$

et la condition (3.35) de la proposition 3.2.3 se déduit de la condition (3.46) ci-dessus. De manière analogue, soit Γ_T un sous-ensemble décroissant de X_T tel que $\eta(T)\notin\Gamma_T$ et $\zeta(T)\notin\Gamma_T$. Si γ est dans Γ_T, alors γ ne peut pas être supérieur à $\eta(T)$ car $\eta(T)$ n'est pas dans Γ_T . Ainsi

$$\Gamma_T \;\subset\; \{\gamma\in X_T, \gamma < \eta(T) \text{ ou } \gamma \not\sim \eta(T)\}\ ,$$

et la condition (3.47) ci-dessus implique la condition (3.36) de la proposition 3.2.3 .

L'existence d'un couplage croissant sous les conditions (3.46) et (3.47) peut donc se déduire de la proposition 3.2.3. L'intérêt de la construction ci-dessus d'un couplage markovien est de généraliser le couplage de Vasershtein. Dans la proposition 3.2.6, certaines des conditions portent sur des configurations γ dans X_T non comparables avec $\eta(T)$ ou $\zeta(T)$. Ces conditions peuvent ne pas sembler très naturelles par rapport au cas des systèmes de spins où elles n'apparaissent pas. Pourtant elles sont indispensables même pour des systèmes où seules des transitions entre configurations comparables sont autorisées. La nécessité de rajouter ces conditions vient de ce que les changements d'état ne se font plus forcément sur un espace muni d'un ordre total. Si elles ne sont pas vérifiées, les conditions du théorème de Massey peuvent ne pas l'être non plus. Considérons par exemple le cas suivant avec $S = \{x, y\}$ et $B_x = B_y = \{0, 1\}$. Nous notons $(\eta(x), \eta(y))$ une configuration dans $X = B_x \times B_y$. Les taux sont

$$\begin{aligned} c_T(\eta, \gamma) &= \lambda \quad \text{si } T = S \text{ et } \eta \sim \gamma \\ & \ 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Le générateur peut être représenté par la matrice suivante encore notée Ω, et indicée dans l'ordre par les états $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$.

$$\Omega = \begin{bmatrix} -3\lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & -2\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & -2\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & -3\lambda \end{bmatrix} .$$

Deux versions d'un tel système ($c^1_T(\eta, \gamma) = c^2_T(\eta, \gamma)$) vérifient clairement la condition (3.46) pour tout $\gamma > \zeta(T)$ et la condition (3.47) pour tout $\gamma < \eta(T)$. Toutefois les conditions de la proposition 3.2.3 ne sont pas satisfaites et il n'existe pas de couplage croissant (a fortiori markovien) pour deux versions de ce système. Le processus n'est en fait pas monotone (définition 3.33). Pour que les conditions (3.46) et (3.47) soient satisfaites, il faut modifier le générateur en

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & -2\lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & -2\lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} .$$

Systèmes de spins avec migration

Nous donnons un couplage markovien pour des systèmes de spins avec migration ainsi que des conditions (proposition 3.2.7) sous lesquelles ce couplage est croissant. Il est facile de vérifier que ces conditions impliquent les conditions nécessaires et suffisantes de la proposition 3.2.5. Rappelons que pour $j = 0, 1$,

$$\mathcal{V}_j(x, \eta, \zeta) = \{y \in \mathcal{S}(x) \text{ avec } \eta(y) = \zeta(y) = j\}$$

et introduisons

$$\mathcal{T}_0(\eta, \zeta) = \{(x, y) \in S \times S \text{ avec } x \in \mathcal{V}_0(y, \eta, \zeta) \text{ et } y \in \mathcal{V}_1(x, \eta, \zeta)\} .$$

Proposition 3.2.7 *Soit deux systèmes de spins avec migration de taux* $\{c^i(x,\eta), c^i(xy,\eta)\}$ $(i=1,2)$*. Si pour tout* η, ζ *dans* X *avec* $\eta \leq \zeta$,

$\forall x \in S,\ \eta(x) = \zeta(x) = 0,$

$$c^1(x,\eta) + \sum_{y \in \mathcal{V}_1(x,\eta,\zeta)} c^1(xy,\eta) \ \leq \ c^2(x,\zeta) + \sum_{y \in \mathcal{V}_1(x,\eta,\zeta)} c^2(xy,\zeta) \tag{3.49}$$

$\forall x \in S,\ \eta(x) = \zeta(x) = 1,$

$$c^1(x,\eta) \ \geq \ c^2(x,\zeta) \tag{3.50}$$

$\forall (x,y) \in \mathcal{T}_0(\eta,\zeta),$

$$c^1(xy,\eta) \ \geq \ c^2(xy,\zeta) \tag{3.51}$$

alors il existe un couplage markovien croissant des deux systèmes.

Démonstration. Le couplage est donné par son générateur $\widetilde{\Omega}$ sur $\widetilde{\mathcal{D}}$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Omega} f(\eta,\zeta) \;=\; & \sum_{x:\eta(x)\neq\zeta(x)} c^1(x,\eta)(f(\eta_x,\zeta)-f(\eta,\zeta)) + c^2(x,\zeta)(f(\eta,\zeta_x)-f(\eta,\zeta)) \\
+ & \sum_{x:\eta(x)=\zeta(x)=0} c^1(x,\eta)(f(\eta_x,\zeta_x)-f(\eta,\zeta)) \\
& \quad + \left[c^2(x,\zeta) + \sum_{y\in\mathcal{V}_1(x,\eta,\zeta)} c^2(xy,\zeta) - c^1(x,\eta) - \sum_{y\in\mathcal{V}_1(x,\eta,\zeta)} c^1(xy,\eta) \right] (f(\eta,\zeta_x)-f(\eta,\zeta)) \\
+ & \sum_{y:\eta(y)=\zeta(y)=1} (c^1(x,\eta)-c^2(x,\zeta))(f(\eta_y,\zeta)-f(\eta,\zeta)) + c^2(x,\zeta)(f(\eta_y,\zeta_y)-f(\eta,\zeta)) \\
+ & \sum_{(x,y)\in\mathcal{T}_0(\eta,\zeta)} c^2(xy,\zeta)(f(\eta_{xy},\zeta_{xy})-f(\eta,\zeta)) + \left(c^1(xy,\eta)-c^2(xy,\zeta)\right)(f(\eta_{xy},\zeta_x)-f(\eta,\zeta)) \\
+ & \sum_{\text{autres } \{x,y\}} c^1(xy,\eta)(f(\eta_{xy},\zeta)-f(\eta,\zeta)) + c^2(xy,\zeta)(f(\eta,\zeta_{xy})-f(\eta,\zeta)).
\end{aligned}$$

Cette expression définit bien un couplage. D'une part, les conditions (3.49), (3.50) et (3.51) assurent que les quantités correspondant aux transitions dans l'expression de $\widetilde{\Omega}$ sont bien positives. D'autre part, pour $f(\eta,\zeta) = g(\eta)$ et $f(\eta,\zeta) = g(\zeta)$, il est facile de vérifier $\widetilde{\Omega} f(\eta,\zeta) = \Omega^1 g(\eta)$ et $\widetilde{\Omega} f(\eta,\zeta) = \Omega^2 g(\zeta)$ respectivement. Le couplage est croissant car l'ensemble $K = \{(\eta,\zeta) \in X \times X \ ,\ \eta \leq \zeta\}$ est préservé par chaque transition autorisée.

■

Dans les sections précédentes, nous avons successivement étudié deux manières d'obtenir des conditions de comparaison. Dans la section 3.2.2, nous avons donné des conditions suffisantes, parfois aussi nécessaires, pour comparer des processus de Markov sur

$$X = \bigotimes_{x\in S} B_x \ .$$

Elles assurent l'existence de couplages croissants sur $X \times X$ mais sans les construire explicitement. Dans la section 3.2.3, nous avons donné des conditions pour que des couplages markoviens, donnés explicitement par leur générateur, soient croissants. Nous ne savons pas si l'existence d'un couplage croissant est toujours équivalente à celle d'un couplage markovien croissant. C'est le cas pour les processus de Markov uniformisables, sur des espaces d'états dénombrables. Ceci est démontré dans [17], théorème 1.4.14 p.46. La démonstration utilise la décomposition de ces processus en une chaîne de Markov et un processus de Poisson. Le théorème ne s'applique pas aux systèmes de particules quand S est infini. Cependant, pour les systèmes de spins, que S soit fini ou infini, les conditions nécessaires et suffisantes de la proposition 3.2.4 sont celles obtenues par Liggett [36] avec le couplage de Vasershtein. Ainsi, dans ce cas particulier, l'existence d'un couplage croissant est équivalente à celle d'un couplage croissant markovien.

Chapitre 4

Modèles de ressources partagées

Nous avons proposé dans [21] une nouvelle classe de modèles de ressources partagées dont nous reprenons la présentation dans ce chapitre. Ils peuvent être vus comme des versions markoviennes du "Drinking Philosophers Problem" de Chandy et Misra [7, 8] et constituent donc une généralisation naturelle du processus des philosophes (PP) présenté dans le chapitre 1. De manière générale, un modèle de ressources partagées consiste en la donnée de trois informations : un ensemble d'utilisateurs, un ensemble de ressources et la connaissance du comportement de chaque utilisateur pris isolément. A partir de ces données, deux points de vue sont envisageables, celui des utilisateurs et celui des ressources. Le point de vue des utilisateurs est celui adopté dans le processus des philosophes où l'état de chaque utilisateur est connu. Plus précisément, nous appelons *processus d'utilisateurs* un processus de Markov à valeurs dans un ensemble de configurations. Une configuration associe à chaque utilisateur l'ensemble des ressources qu'il utilise à un instant donné. Comme pour le PP, un processus d'utilisateurs est contraint de rester dans un ensemble de configurations admissibles qui traduit le partage des ressources. Deux utilisateurs ne peuvent pas utiliser simultanément la même ressource. Nous verrons qu'une manière naturelle de construire de tels processus est de tronquer un produit de processus *individuels* indépendants. Dans certains systèmes cependant nous ne disposons pas des informations nécessaires à une telle construction. Il arrive qu'une ressource soit prise sans que l'utilisateur qui l'occupe soit précisément connu. Nous appelons *processus de ressources* un processus de Markov à valeurs dans l'ensemble des sous-ensembles de ressources. L'état d'un tel processus s'interprète comme l'ensemble des ressources occupées à un instant donné. Un processus de ressources peut être défini comme une superposition de processus individuels. Du point de vue des ressources, toutes les configurations (ressources occupées ou non) sont admissibles et il n'y a plus lieu de restreindre l'espace d'états comme pour les processus d'utilisateurs. En revanche, une telle construction est très générale et il important de montrer qu'elle peut effectivement permettre de modéliser des systèmes de ressources partagées. Nous le faisons à travers un exemple modélisant une bibliothèque. Les deux points de vue, utilisateurs et ressources, sont liés. Dans les deux cas, le cadre est celui des systèmes de particules pour lesquels nous avons développé des outils dans le chapitre 3. Nous donnons des exemples d'applications de ces outils après avoir présenté les liens qui peuvent exister entre ces modèles de ressources partagées et des modèles existants tels que les Loss Networks de Kelly [33] ou les modèles à particules dures en mécanique statistique (*cf.* [2]). Pour les processus d'utilisateurs construits par troncature, nous retrouvons des préoccupations analogues à celles rencontrées pour le PP. L'interprétation de certains paramètres de performance en termes de grandeurs thermodynamiques confirme notamment l'importance de la fonction de partition. Nous donnons un algorithme de calcul général de cette fonction pour de tels processus. Il repose sur les résultats de la section 3.1 du chapitre 3 sur la réversibilité. Nous l'illustrons sur des cas particuliers pour lesquels nous pouvons donner une formule explicite pour la fonction de partition (proposition 4.3.2) ou une manière récursive de la déterminer (proposition 4.3.3). Les résultats obtenus généralisent certains de ceux trouvés pour le PP dans le chapitre 1. Les techniques de comparaison stochastique, développées dans la section 3.2 du chapitre 3, peuvent être également utiles dans l'étude de nos modèles. Nous donnons des conditions suffisantes d'ergodicité (proposition 4.4.1) pour un processus d'utilisateurs sur $\mathbb{Z}$ réversible et invariant par translation. Ce résultat généralise le théorème 2.1 p. 359 de [54]. Toutefois, du fait du partage des ressources et de l'existence de configurations d'utilisateurs non autorisées, les conditions sont difficiles à vérifier et les résultats obtenus par comparaison stochastique pour les processus d'utilisateurs sont souvent limités. Ces outils sont en revanche bien adaptés aux processus de ressources pour lesquels il n'y a pas de configurations interdites. Nous pouvons obtenir ainsi différents résultats de monotonie pour l'ensemble des ressources occupées en termes de taux de transition et de configuration initiale (propositions 4.4.2 et 4.4.3). Ces résultats apportent une justification théorique à l'evaluation des performances d'un modèle de ressources partagées par simulation de Monte-Carlo. Nous les appliquons en particulier au modèle de la bibliothèque. Ce chapitre est donc organisé comme suit. Dans la section 4.1 nous détaillons les définitions des processus d'utilisateurs et de ressources. Dans la section 4.2, nous présentons les Loss Networks, les modèles à particules dures et nous montrons les analogies entre paramètres de performance et grandeurs thermodynamiques. Dans la section 4.3 nous donnons des exemples de calculs de fonctions de partition pour des processus d'utilisateurs obtenus par troncature. Dans la section 4.4 nous présentons des applications des résultats de comparaison stochastique du chapitre 3 aux processus d'utilisateurs et de ressources.

4.1 Processus d'utilisateurs et de ressources

Soit R un ensemble fini de ressources et U un ensemble fini d'utilisateurs. L'ensemble des sous-ensembles de R est noté $\mathcal{P}(R)$. Un processus d'utilisateurs (PU) est un processus de Markov à valeurs dans $X = \mathcal{P}(R)^U$. Un processus de ressources (PR) est un processus de Markov à valeurs dans $X = \mathcal{P}(R)$. Nous considérons des manières naturelles de construire de tels processus à partir de la connaissance des comportements de chaque utilisateur pris isolément. Pour les PU cela se fait par troncature de comportements individuels indépendants. Une façon envisageable de construire des PR est de considérer à chaque instant l'ensemble des ressources occupées dans un PU. Nous donnons des conditions d'aggrégation (proposition 4.1.1) sous-lesquelles le processus obtenu se comporte effectivement comme un PR. Ces conditions sont généralement assez restrictives. Une alternative est de construire des PR par superposition de processus locaux. Nous montrons à travers un modèle de bibliothèque qu'une telle construction peut effectivement servir à modéliser des systèmes de ressources partagées.

Nous appelons encore configuration un élément η de $\mathcal{P}(R)^U$, *i.e.* une application de U dans $\mathcal{P}(R)$. Pour chaque utilisateur u, $\eta(u)$ représente l'ensemble des ressources occupées par l'utilisateur. Dans le modèle de Chandy et Misra [7], $\eta(u)$ est le cocktail bu par le philosophe u, avec $\eta(u) = \emptyset$ si u ne boit pas. Les PU sont des processus de Markov à valeurs dans un ensemble de configurations. Ce sont des cas particuliers des systèmes de particules auxquels nous nous sommes intéressés dans le chapitre 3. Plus précisément, les PU sont des systèmes de type spin (définition 3.1.3, chapitre 3). Au cours d'une transition, un seul utilisateur peut changer d'état à la fois. Si η est une configuration et γ un sous-ensemble de R, η_u^γ représente la configuration obtenue à partir de η en changeant l'état de u en γ,

$$\forall u \in U,\ \forall \gamma \in \mathcal{P}(R), \qquad \begin{array}{rcl} \eta_u^\gamma(v) & = & \eta(v) \quad \text{si } v \neq u \\ \eta_u^\gamma(u) & = & \gamma \quad . \end{array}$$

Nous notons $c(u, \eta, \gamma)$ le taux avec lequel l'utilisateur u passe de l'état $\eta(u)$ à γ quand la configuration courante du système est η. Par définition, nous appelons processus d'utilisateurs (PU) de taux $c(u, \eta, \gamma)$ un processus de Markov $\{\eta_t,\ t \geq 0\}$ sur l'ensemble des configurations pour lequel le taux de transition entre deux configurations η et ζ est

$$\begin{array}{cl} c(u, \eta, \gamma) & \quad \text{si } \zeta = \eta_u^\gamma \\ 0 & \quad \text{sinon.} \end{array}$$

Le partage des ressources interdit certaines configurations. Une ressource ne peut être occupée que par un utilisateur à la fois. Comme pour le PP, nous noterons $\mathcal{A}$ l'ensemble des configurations admissibles défini par

$$\mathcal{A} = \{\eta \in \mathcal{P}(R)^U \text{ t.q. } \forall u, v \in U\ ,\ \eta(u) \cap \eta(v) = \emptyset\} \quad .$$

La condition suivante contraint les PU à rester dans $\mathcal{A}$,

$$\forall u \in U,\ \forall \eta \in \mathcal{A},\ \forall \gamma \in \mathcal{P}(R), \quad c(u, \eta, \gamma) = 0 \quad \text{si} \quad \eta_u^\gamma \notin \mathcal{A} \quad . \tag{4.1}$$

Plusieurs manières de définir les taux $c(u, \eta, \gamma)$ peuvent être proposées. Un premier exemple montre que les PU sont des généralisations du PP. Chaque utilisateur est associé à un sous-ensemble particulier R_u de ressources auxquelles il a accès. Nous supposons qu'un utilisateur n'a que deux possibilités, il utilise soit toutes les ressources de R_u soit aucune. Les taux $c(u, \eta, \gamma)$ sont alors définis par

$$c(u, \eta, \gamma) = \begin{cases} \lambda & \text{si} \quad \eta(u) = \emptyset\ ,\ \gamma = R_u \text{ et } \eta(v) \cap R_u = \emptyset\ ,\ \forall v \neq u \\ 1 & \text{si} \quad \eta(u) = R_u \\ 0 & \text{dans tout autre cas.} \end{cases}$$

Nous pouvons écrire $\eta(u) = 1, 0$ plutôt que $\eta(u) = R_u, \emptyset$. Si nous définissons de plus un graphe G en reliant par une arête les utilisateurs u et v tels que $R_u \cap R_v \neq \emptyset$, le processus ainsi défini est le PP sur G.

Nous appelons processus de ressources (PR) un processus de Markov à valeurs dans $\mathcal{P}(R)$. En pratique, les PU sont souvent construits par troncature de PR *individuels*. A chaque utilisateur u est associé un PR de taux $\lambda_u(\alpha,\beta)$. Ces taux traduisent le comportement individuel de l'utilisateur. Ce sont ceux avec lesquels il échangerait les sous-ensembles de ressources s'il était seul. Un PU global peut être défini en tronquant à $\mathcal{A}$ le produit direct de ces PR individuels. Ce qui revient à considérer les taux suivants,

$$\forall u \in U,\ \forall \eta \in \mathcal{A},\ \forall \gamma \in \mathcal{P}(R), \quad c(u,\eta,\gamma) = \begin{cases} \lambda_u(\eta(u),\gamma) & \text{si} \quad \eta_u^\gamma \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Comme nous l'avons vu dans la section 3.1 du chapitre 3 (proposition 3.1.3) cette opération de troncature est bien adaptée aux processus réversibles. En effet, supposons que pour tout u les taux $\lambda_u(\alpha,\beta)$ sont ceux d'un processus réversible sur $\mathcal{P}(R)$ avec une unique classe d'irréductibilité et de mesure réversible π_u. Considérons des taux $c(u,\eta,\gamma)$ définis comme en (4.2) et supposons le PU correspondant irréductible sur $\mathcal{A}$. Par la proposition 3.1.3 du chapitre 3, ce PU est réversible et sa mesure réversible est définie par

$$\forall \eta \in \mathcal{A}, \quad \nu(\eta) = Z^{-1} \prod_{u\in U} \pi_u(\eta(u)) \quad ,$$

avec

$$Z \quad = \quad \sum_{\eta\in\mathcal{A}} \prod_{u\in U} \pi_u(\eta(u)) \quad . \tag{4.3}$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1 le PP est un cas particulier de PU réversible. Il existe d'autres manières naturelles de définir des PR individuels réversibles. Nous en donnons trois exemples.

Exemple 4.1.1 *Ressources indépendantes.*

Nous supposons que chaque utilisateur prend et libère les ressources une par une avec un taux qui ne dépend que de la ressource et de l'utilisateur. Les taux des PR individuels ont alors la forme suivante,

$$\forall \alpha,\beta \in \mathcal{P}(R), \quad \lambda_u(\alpha,\beta) = \begin{cases} a_u(r) & \text{si} \quad r \notin \beta\ ,\ \alpha = \beta \cup \{r\} \\ b_u(r) & \text{si} \quad r \notin \alpha\ ,\ \beta = \alpha \cup \{r\} \\ 0 & \text{dans tout autre cas.} \end{cases}$$

Ce PR est clairement réversible. Sa mesure réversible est définie par

$$\begin{aligned} \forall \alpha \neq \emptyset, \qquad \pi_u(\alpha) \quad &= \quad \pi_u(\emptyset) \prod_{r\in\alpha} \frac{b_u(r)}{a_u(r)} \ , \\ \pi_u(\emptyset) \quad &= \quad \left(1 + \sum_{\alpha\neq\emptyset} \prod_{r\in\alpha} \frac{b_u(r)}{a_u(r)}\right)^{-1} \quad . \end{aligned}$$

Exemple 4.1.2 *Retour à l'état vide.*

Nous supposons que chaque utilisateur est obligé de rendre la totalité des ressources qu'il utilise avant de pouvoir prendre un autre sous-ensemble de ressources. Les taux de son PR individuel sont les suivants,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{P}(R), \quad \lambda_u(\alpha, \beta) = \begin{cases} a_u(\alpha) & \text{si} \quad \beta = \emptyset \\ b_u(\beta) & \text{si} \quad \alpha = \emptyset \\ 0 & \text{dans tout autre cas.} \end{cases}$$

Ce PR est réversible. Sa mesure réversible est définie par

$$\begin{aligned} \forall \alpha \neq \emptyset, \qquad \pi_u(\alpha) &= \pi_u(\emptyset) \frac{b_u(\alpha)}{a_u(\alpha)} \,, \\ \pi_u(\emptyset) &= \left(1 + \sum_{\alpha \neq \emptyset} \frac{b_u(\alpha)}{a_u(\alpha)} \right)^{-1} \quad . \end{aligned}$$

Exemple 4.1.3 *Taux dépendant de l'état d'arrivée.*

Nous supposons que chaque utilisateur u attribue un poids $\mu_u(\beta)$ à chaque sous-ensemble β de R et que les taux sont

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{P}(R), \qquad \lambda_u(\alpha, \beta) = \mu_u(\beta) \quad .$$

La mesure réversible de ce PR est proportionnelle à μ_u.

Dans un modèle de ressources partagées, les incompatibilités sont en général représentées à l'aide d'une structure de graphe ou d'hypergraphe où les utilisateurs sont les sommets et les ressources sont les arêtes (*cf.* [8]). Cette structure est implicite dans la définition plus générale des taux $c(u, \eta, \gamma)$. Elle peut être retrouvée de la façon suivante. Pour chaque utilisateur u, nous définissons son ensemble individuel de ressources R_u comme l'ensemble des ressources auxquelles il a accès

$$R_u \;=\; \cup \{ \gamma \in \mathcal{P}(R) \; t.q. \; \exists \eta \in \mathcal{A} \quad c(u, \eta, \gamma) > 0 \} \quad . \tag{4.4}$$

A chaque paire $\{u, v\}$ d'utilisateurs, nous pouvons alors associer l'intersection de leurs ensembles individuels. Les éléments de cet ensemble peuvent être vus comme les arêtes d'un hypergraphe non-orienté (*cf.* Chandy et Misra [7]). A titre d'exemple, nous présentons le cas d'un réseau cyclique dans lequel chaque utilisateur partage des ressources avec deux voisins.

Exemple 4.1.4 *Réseaux cycliques.*

Soit G une structure de graphe cyclique sur l'ensemble des utilisateurs U. Nous l'identifions à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Chaque utilisateur u dans U est associé à un ensemble de ressources R_u partitionné en trois sous-ensembles R_u^g, R_u^d et R_u^i. Les sous-ensembles R_u^g et R_u^d sont partagés respectivement avec les utilisateurs de droite et de gauche.

$$\forall u \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad R_u^g = R_{u-1}^d \,.$$

Les ressources dans R_u^i ne sont partagées avec aucun autre utilisateur. Nous commençons par définir les taux $\lambda_u(\alpha, \beta)$ pour chaque PR individuel puis les taux $c(u, \eta, \gamma)$ du PU global par troncature comme en (4.2). Les PR individuels sont des copies d'un même PR au sens suivant. Soit R_0 un ensemble de ressources de référence, partitionné en trois sous-ensembles

R_0^g, R_0^d et R_0^i. Soit $\lambda(\alpha,\beta)$ les taux d'un PR sur R_0. Supposons que pour tout u il existe une bijection σ_u de R_0 sur R_u qui préserve les partitions et les taux,

$$\sigma_u(R_0^g) = R_u^g \ , \ \sigma_u(R_0^d) = R_u^d \ , \ \sigma_u(R_0^i) = R_u^i$$

et

$$\lambda_u(\sigma_u(\alpha), \sigma_u(\beta)) = \lambda(\alpha, \beta) \quad .$$

Les taux $c(u,\eta,\gamma)$ qui en résultent sont alors invariants par toute translation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

$$c(u, \eta(.), \gamma) = c(u+1, \eta(.-1), \gamma) \quad . \tag{4.5}$$

Un PU de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui vérifie (4.5) est dit *invariant par translation*. Un cas particulier est celui où une arête de G ne correspond qu'à une seule ressource. Chaque utilisateur a deux ressources à sa droite et à sa gauche. Nous pouvons définir chaque PR individuel par ses taux $\lambda_u(\alpha,\beta)$ pour les 4 combinaisons des deux ressources g et d. Si ces taux sont les mêmes pour tous les utilisateurs, le PU global qui en découle est invariant par translation. Le PP sur un cycle (*cf.* [54]) en est un exemple.

Bien qu'en pratique le nombre d'utilisateurs soit toujours fini, il peut être utile de considérer des systèmes de particules infinis pour approcher les systèmes de grande taille. Nous n'abordons pas les problèmes soulevés par la définition des PU avec un nombre infini d'utilisateurs et renvoyons au chapitre 1 de [36] pour plus de détails. En revanche, les questions d'ergodicité sont des applications importantes des techniques de comparaison stochastique. Il nous a donc semblé intéressant pour illustrer ces techniques de donner en section 4.4 un résultat d'ergodicité pour des PU invariants par translation, définis sur $\mathbb{Z}$ de la même manière que le PU donné ci-dessus pour les cycles. Le PU sur $\mathbb{Z}$ que nous considérerons est un système de particules à espace des phases fini et à interactions de portée finie. Son existence découle de résultats classiques (*cf.* [36] p.27).

En ce qui concerne la fonction de partition, diverses relations intéressantes peuvent être déduites de l'expression (4.3). Nous notons plus précisément cette fonction $Z_{(U,R)}$. Pour tout sous-ensemble W d'utilisateurs, l'expression (4.3) peut se réécrire en (4.6). Pour tout W inclus dans U, nous notons $\mathcal{A}_W$ l'ensemble des configurations admissibles lorsque l'ensemble des utilisateurs est réduit à W,

$$\mathcal{A}_W = \{\eta \in \mathcal{P}(R)^W \text{ t.q. } \forall u,v \in W \ , \ \eta(u) \cap \eta(v) = \emptyset\} \quad .$$

Pour γ dans $\mathcal{A}_W$, nous posons pour simplifier les écritures

$$\zeta_W = \bigcup_{u \in W} \gamma(u) \ ,$$

l'ensemble des ressources occupées par les utilisateurs de W lorsqu'ils sont dans la configuration γ. Pour tout W inclus dans U nous avons

$$Z_{(U,R)} \quad = \quad \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_W} \Big(\prod_{u \in W} \pi_u(\gamma(u)) \Big) \, Z_{(U \setminus W, R \setminus \zeta_W)} \ . \tag{4.6}$$

Ainsi que

$$\forall \gamma \in \mathcal{A}_W, \quad \nu(\eta(W) = \gamma) \;=\; (\prod_{u \in W} \pi_u(\gamma(u)))\frac{Z_{(U\backslash W, R\backslash \zeta_W)}}{Z_{(U,R)}} \;. \tag{4.7}$$

Cette probabilité peut être vue comme le produit de deux probabilités. La première est $\prod_{u \in W} \pi_u(\gamma(u))$, la probabilité à l'équilibre que chaque utilisateur u dans W demande les ressources $\gamma(u)$. La seconde est $\frac{Z_{(U\backslash W, R\backslash \zeta_W)}}{Z_{(U,R)}}$, la probabilité qu'une telle demande soit acceptée. Soit un graphe G, un sommet u et un sous-ensemble de sommets C complet. Nous notons $G\backslash u$ (respectivement $G\backslash \overline{u}$, $G\backslash C$) le graphe obtenu en enlevant le sommet u (respectivement $\{u\} \cup N(u)$, C) et toute arête incidente. Pour le PP sur un graphe $G = (S, E)$ avec $S = U$ et une arête entre chaque paire d'utilisateurs u et v tels que $R_u \cap R_v \neq \emptyset$, la fonction de partition Z_G définie dans le chapitre 1 par (1.2) correspond à $Z_{(U,R)}$ à une constante multiplicative près. Elle vérifie

$$Z_G \;=\; (\prod_{u \in U} \pi_u(\emptyset))^{-1} \; Z_{(U,R)} \;.$$

Nous avons donc

$$Z_{(U,R)} \;=\; \frac{Z_G}{(1+\lambda)^{|U|}} \;, \tag{4.8}$$

mais aussi

$$Z_{(U\backslash\{u\},R)} \;=\; \frac{Z_{G\backslash u}}{(1+\lambda)^{|U\backslash\{u\}|}} \;, \tag{4.9}$$

$$Z_{(U\backslash\{u\},R\backslash R_u)} \;=\; \frac{Z_{G\backslash \overline{u}}}{(1+\lambda)^{|U\backslash\{u\}|}} \;, \tag{4.10}$$

et pour C complet

$$Z_{(U\backslash C,R)} = \frac{Z_{G\backslash C}}{(1+\lambda)^{|U\backslash C|}} \;,$$

ainsi que

$$\forall x \in C, \quad Z_{(U\backslash C,R\backslash R_x)} = \frac{Z_{G\backslash \overline{x}}}{(1+\lambda)^{|U\backslash C|}} \;.$$

L'expression (4.6) pour $W = \{u\}$ et $W = C$ conduit à

$$Z_G \;=\; Z_{G\backslash u} + \lambda \; Z_{G\backslash \overline{u}} \tag{4.11}$$

$$Z_G \;=\; Z_{G\backslash C} + \lambda \sum_{x \in C} Z_{G\backslash \overline{x}} \quad . \tag{4.12}$$

L'expression (4.7) pour $W = \{u\}$, conduit à

$$\nu_G(\eta(u) = 0) \;=\; \frac{Z_{G\backslash u}}{Z_G} \tag{4.13}$$

$$\nu_G(\eta(u) = 1) \;=\; \lambda \; \frac{Z_{G\backslash \overline{u}}}{Z_G} \;. \tag{4.14}$$

D'autres relations se déduisent facilement. En particulier la proposition 1.5.1 du chapitre 1 découle de ces relations écrites pour le PP sur des arbres. Nous les utiliserons encore dans les chapitres suivants.

De manière analogue, il est possible de fixer l'état d'une ressource (occupée ou non) et de regarder comment est modifiée la fonction de partition $Z_{(U,R)}$. Pour tout r dans R, nous notons U_r l'ensemble des utilisateurs qui ont accès à la ressource r,

$$U_r \ = \ \{u \in U \ t.q. \ r \in R_u\} \ . \tag{4.15}$$

Nous avons

$$Z_{(U,R)} \ = \ Z_{(U,R\setminus\{r\})} + \sum_{u \in U_r} \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(R_u), r \in \gamma} \pi_u(\gamma) \ Z_{(U\setminus\{u\},R\setminus\gamma)} \ . \tag{4.16}$$

Le terme $Z_{(U,R\setminus\{r\})}$ correspond aux configurations admissibles dans lesquelles r n'est pas occupée. Pour le PP sur un graphe G, une ressource r correspond à une arête $\{x,y\}$, où x et y représentent deux utilisateurs. Si r est supprimée, x et y sont bloqués à l'état $\emptyset$ et tout se passe comme s'ils étaient absents. Dans ce cas, l'équation (4.16) redonne l'équation (4.12) avec $C = \{x,y\}$.

De même, la probabilité que les ressources d'un sous-ensemble γ de R soient toutes disponibles est

$$\frac{Z_{(U,R\setminus\gamma)}}{Z_{(U,R)}} \ . \tag{4.17}$$

Il ne faut toutefois pas confondre cette probabilité avec la probabilité que la demande des ressources γ par un utilisateur u soit acceptée. Celle-ci est donnée par

$$\frac{Z_{(U\setminus\{u\},R\setminus\gamma)}}{Z_{(U,R)}} \ .$$

Nous retrouverons une telle formule dans le cadre des Loss Networks (section 4.2.1) où nous parlerons plutôt de la probabilité de perte d'une demande (voir formule (4.24)). Des applications de ces formules et en particulier de (4.17) sont données dans la section 4.3.

Considérons à présent le point de vue des ressources. Une première idée naturelle consiste à construire des PR à partir de PU. Pour un PU, chaque coordonnée $\eta_t(u)$ (ensemble des ressources occupées par l'utilisateur u à l'instant t) ou toute union de coordonnées (ensemble des ressources occupées par un sous-ensemble d'utilisateurs) est un processus à valeurs dans $\mathcal{P}(R)$. Cependant ce processus n'est en général pas markovien. Nous donnons donc ci-dessous les conditions d'aggrégation sous lesquelles l'union des coordonnées d'un PU est un PR. Elles sont obtenues directement à partir des conditions classiques de Rosenblatt [45].

Proposition 4.1.1 *Soit $\{\eta_t, \ t \geq 0\}$ un PU de taux $c(u,\eta,\gamma)$. Définissons pour tout $t \geq 0$*

$$\zeta_t = \bigcup_{u \in U} \eta_t(u) \quad .$$

Alors $\{\zeta_t,\ t \geq 0\}$ *est un processus de Markov (PR) de taux* $c(\alpha, \beta)$ *si et seulement si*

$$\forall \eta \in X, \bigcup_{u \in U} \eta(u) = \alpha\,, \quad \sum c(u, \eta, \gamma) \;=\; c(\alpha, \beta) \quad , \tag{4.18}$$

où la somme porte sur toutes les paires (u, γ) *telles que* $\bigcup_{v \in U} \eta_u^\gamma(v) = \beta$.

Les conditions (4.18) sont très restrictives. En pratique, elles ne sont vérifiées que pour des réseaux très symétriques. Nous les examinons dans le cas particulier des PU construits par troncature des PR individuels définis dans les exemples 4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3. Dans le premier cas, toutes les ressources sont prises (si elles sont libres) et libérées indépendamment avec des taux ne dépendant que de la ressource et de l'utilisateur. La condition (4.18) est satisfaite si les taux ne dépendent que des ressources et pas de l'utilisateur. Dans ce cas, chaque ressource est prise et libérée selon un processus de Markov à deux états, et tous ces processus binaires sont indépendants. Le processus $\{\zeta_t,\ t \geq 0\}$ est simplement le produit direct de ces processus. Lorsque les PR individuels sont ceux de l'exemple 4.1.2, la condition (4.18) est encore plus restrictive. Pour simplifier nous supposons que les processus individuels sont des copies d'un même PR, de sorte que les taux avec lesquels les sous-ensembles de ressources sont pris et libérés ne dépendent pas de l'utilisateur. Cette hypothèse est loin d'être suffisante. En effet, supposons qu'un sous-ensemble de plusieurs ressources soit pris et libéré par un utilisateur donné avec des taux non nuls. Si la condition (4.18) est satisfaite, deux utilisateurs distincts ne peuvent pas occuper simultanément des ressources dans ce même sous-ensemble. Si c'était le cas, le taux avec lequel tout le sous-ensemble est relâché devrait être nul puisque seul un utilisateur peut changer d'état au cours d'une transition. Les taux $a_u(\alpha)$ et $b_u(\beta)$ doivent donc être très particuliers. Nous donnons deux exemples possibles.

$$\begin{array}{rcllll} a_u(\alpha) & = & a(r) & \text{si} & \alpha = \{r\}\,, & \text{et } 0 \text{ sinon} \\ b_u(\beta) & = & b(r) & \text{si} & a_u(\beta) \neq 0\,, & \text{et } 0 \text{ sinon} \end{array} \quad .$$

ou

$$\begin{array}{rcllll} a_u(\alpha) & = & a(R_u) & \text{si} & \alpha = R_u\,, & \text{et } 0 \text{ sinon} \\ b_u(\beta) & = & b(R_u) & \text{si} & a_u(\beta) \neq 0\,, & \text{et } 0 \text{ sinon} \end{array} \quad .$$

A peu de changements près, les remarques ci-dessus sont encore valables lorsque les PR individuels sont ceux de l'exemple 4.1.3.

Les conditions d'aggrégation sont donc trop contraignantes et cette manière de construire des PR n'est pas satisfaisante. Un procédé plus intéressant consiste à définir des PR par superposition de PR locaux indicés par U. Pour ce faire, il est commode de voir un PR comme un processus de Markov sur $\{0,1\}^R$. Un sous-ensemble de R est identifié à une configuration η de $\{0,1\}^R$ définie par $\eta(r) = 1$ si r appartient au sous-ensemble et $\eta(r) = 0$ sinon. Nous écrirons alors souvent $\eta \in \mathcal{P}(R)$ pour $\eta \in \{0,1\}^R$. Nous noterons aussi $\eta \Delta \zeta$ l'ensemble $(\eta \backslash \zeta) \cup (\zeta \backslash \eta)$ des sites r de R où les configurations η et ζ diffèrent. Pour un ensemble fini U d'utilisateurs, considérons une famille $(R_u)_{u \in U}$ de sous-ensembles finis distincts indicée par U. Chaque R_u peut être vu comme l'ensemble de ressources individuel de l'utilisateur u

(équation (4.4)). L'ensemble de toutes les ressources est

$$R = \bigcup_{u \in U} R_u \,.$$

Pour tout u dans U, nous considérons un PR local de taux

$$\{c_u(\eta, \zeta)\,,\ \eta, \zeta \in \mathcal{P}(R)\}\,.$$

Ce PR est local dans le sens où seules les transitions qui affectent des ressources de R_u sont autorisées. Ainsi, $c_u(\eta, \zeta)$ n'est positif que si η et ζ diffèrent en des sites de R_u ($\eta \Delta \zeta \in \mathcal{P}(R_u)$). Une *superposition* de tels PR locaux est un PR défini, pour toute fonction $f(\eta)$ sur $\mathcal{P}(R)$ par

$$\begin{aligned} \Omega f(\eta) &= \sum_{u \in U} \sum_{\zeta \in \mathcal{P}(R)} c_u(\eta, \zeta)\,(f(\zeta) - f(\eta)) \\ &= \sum_{u \in U} \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(R_u)} c_u(\eta, \eta^{\gamma}_{R_u})\left(f(\eta^{\gamma}_{R_u}) - f(\eta)\right) \quad . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Une telle construction est très générale et dépasse le cadre des ressources partagées. Pour montrer qu'elle peut effectivement s'interpréter en termes de partage de ressources, nous adoptons un point de vue *bayésien* qui consiste à considérer des taux $c_u(\eta, \zeta)$ particuliers. Nous le présentons à partir d'un modèle (certes caricatural) d'une bibliothèque de mathématiques. Les ressources (R) sont des livres de mathématiques. Différentes équipes de recherche (algèbre, analyse, géométrie, *etc.*) se partagent ces ressources et jouent le rôle d'utilisateurs formels (U). Les livres sont classés par sujet de recherche (algèbre, analyse, géométrie, *etc.*) et une équipe u dans U n'a accès qu'aux livres (R_u) qui sont classés dans son domaine de recherche. Un livre peut traiter de différents sujets et être classé dans différents domaines de sorte que les ensembles $(R_u)_{u \in U}$ ne sont en général pas disjoints. La personne qui gère la bibliothèque ne peut guère faire autrement que d'adopter le point de vue des ressources. En effet, Il arrive que des livres soient échangés entre utilisateurs sans retour à la bibliothèque, que des individus empruntent ou rendent des ouvrages pour leurs collègues, *etc.* Ainsi, le bibliothécaire peut facilement savoir si un livre est emprunté ou non mais ne sait pas forcément quel est précisément l'utilisateur qui le détient. Nous supposons en fait que pour chaque sujet, le bibliothécaire peut observer les départs et retours de livres classés dans le sujet et qu'il dispose donc pour tout u des taux de PR individuels

$$\{\lambda_u(\alpha, \beta),\ \alpha, \beta \in \mathcal{P}(R_u)\}.$$

La configuration courante η de la bibliothèque est l'ensemble des livres empruntés. Nous avons par exemple $\eta(r) = 1$ si le livre r est occupé. Lorqu'il y a emprunt de livres, c'est-à-dire passage d'une configuration η à une configuration $\zeta \supset \eta$, cela peut être dû à un des utilisateurs parmi ceux qui ont accès aux ouvrages empruntés. Ces individus sont les utilisateurs u pour lesquels $\eta \Delta \zeta \subset R_u$. Ainsi, il est naturel de prendre pour taux de passage de η à $\zeta \supset \eta$ la somme de taux suivante

$$\sum_{u : \eta \Delta \zeta \subset R_u} \lambda_u(\eta(R_u), \zeta(R_u)), \tag{4.20}$$

Pour les échanges ou les retours d'ouvrages la situation est différente. Les taux correspondants ne peuvent être de simples sommes de taux comme dans le cas précédent car nous supposons qu'il n'y a qu'un seul exemplaire de chaque ouvrage qui ne peut donc être rendu que par un utilisateur à la fois. Le problème est que lors d'un retour de livres, le bibliothécaire ne peut cependant pas savoir précisément quel est l'utilisateur (parmi ceux qui étaient susceptibles de le faire) qui a rendu les ouvrages. Pour cette raison, il attribue à chaque utilisateur formel u une probabilité $p_{\eta,\zeta}(u)$ d'être à l'origine de la transition de η vers $\zeta \not\supset \eta$. Nous avons $\sum_{u\in U} p_{\eta,\zeta}(u) = 1$ avec $p_{\eta,\zeta}(u) = 0$ si $\eta\Delta\zeta \not\subset R_u$. Ce dernier point exprime qu'un utilisateur u ne peut être à l'origine d'une transition qui affecte des livres auxquels il n'a pas accès. Il est donc naturel de considérer un PR global construit comme dans l'équation (4.19) par superposition de PR locaux. Un PR local est un système de particules dont les taux $c_T(\eta,\gamma)$ (avec les notations du chapitre 3) sont

$$\begin{array}{llcll} \forall u \in U\,, & c_T(\eta,\gamma) & = & 0 & \text{si } T \neq R_u \\ \text{et} & c_{R_u}(\eta,\gamma) & = & c_u(\eta,\eta^{\gamma}_{R_u})\,. & \end{array}$$

Pour simplifier nous écrivons, pour tout η dans $\mathcal{P}(R)$ et γ dans $\mathcal{P}(R_u)$, $c_u(\eta,\gamma)$ plutôt que $c_u(\eta,\eta^{\gamma}_{R_u})$. Les PR locaux que nous considérons sont définis par les taux suivants,

$$\begin{array}{lcl} \text{si } \eta(R_u) \subset \gamma, \quad c_u(\eta,\gamma) & = & \lambda_u(\eta(R_u),\gamma), \\ \text{si } \eta(R_u) \not\subset \gamma, \quad c_u(\eta,\gamma) & = & p_{\eta,\eta^{\gamma}_{R_u}}(u)\; \lambda_u(\eta(R_u),\gamma) \end{array} \tag{4.21}$$

Par superposition, nous retrouvons bien dans le cas des emprunts la somme (4.20). Pour des échanges ou des retours nous obtenons un taux qui est une combinaison convexe de taux.

Les PU et les PR que nous venons de définir sont des cas particuliers de systèmes de particules auxquels nous pouvons appliquer les outils développés dans le chapitre 3. Les calculs des mesures d'équilibre des PU reposent sur la réversibilité. Dans la section 4.3, nous donnons un algorithme pour déterminer les fonctions de partition. Dans la section 4.4, nous considérons les techniques de comparaison stochastique. Pour les PU il n'est pas toujours facile de les appliquer et d'obtenir des résultats généraux. Cela vient principalement des contraintes dues au partage, *i.e.* de l'existence d'un ensemble $\mathcal{A}$ de configurations admissibles. Les PU sont des processus essentiellement "répulsifs". Il est difficile, sauf cas particulier (voir [54] et la section 4.4.1) de leur appliquer des arguments de monotonie. En revanche, les outils de comparaison stochastique et de monotonie sont bien mieux adaptés aux PR. En particulier, dans la section 4.4.2, nous donnons pour les taux (4.21) des conditions supplémentaires assez naturelles sous lesquelles le PR global représentant la bibliothèque est monotone. Avant cela nous précisons quelques analogies entre PU, PR et d'autres modèles existants.

4.2 Liens avec d'autres modèles

4.2.1 Loss Networks

Les "Loss Networks" (LN) sont, entre autres, des modèles de systèmes à ressources partagées. Ils ont été introduits par Kelly [33] dans le cadre des réseaux de communications.

Les applications sont diverses : routage, attribution de canaux radio, modèles de bases de données, systèmes de réservations (voir [33] et [38] pour plus de détails). Dans ces modèles des clients de différents types arrivent et demandent simultanément un certain nombre de ressources de manière exclusive ou non. Dans un modèle de base de données par exemple, les accès en écriture seront exclusifs mais pas les accès en lecture. Un même objet peut être lu par deux utilisateurs à la fois sans problème. Les ressources sont en nombre limité. Elles sont partagées dans le sens où un client qui arrive, ne peut pas obtenir des ressources déjà occupées. Il est alors bloqué et sa demande est perdue. Les travaux sur les LN sont trop nombreux pour être examinés ici en détail. Nous ne présentons que la modélisation de base et essayons de voir quels sont les liens avec nos modèles.

Le réseau. Il est constitué d'un ensemble fini $\mathcal{J}$ de types de ressources. Pour chaque type j dans $\mathcal{J}$, il y a une quantité $C(j)$ de ressources de type j disponibles dans le système. Les quantités $C(j)$ sont appelées capacités. Nous avons d'autre part un ensemble $\mathcal{C}$ de types de réservations (les clients du système). Un type de réservation c dans $\mathcal{C}$ est caractérisé par les ressources qu'il utilise. Il demande simultanément et de manière exclusive $M(j,c) \in \mathbb{N}$ ressources de type j pour tout j dans $\mathcal{J}$. Un exemple donné par [38] est celui d'un réseau de nœuds joints par des liens de communication. Les liens sont les types de ressources. Il y a pour chaque lien j, $C(j)$ circuits disponibles. Un ensemble $\mathcal{C}$ de chemins sont possibles entre les nœuds du réseau. Un chemin c dans $\mathcal{C}$ utilise $M(j,c)$ circuits pour chaque lien j. Dans le cas particulier où $M(j,c)$ vaut 0 ou 1, un chemin peut être identifié à un ensemble de liens (arêtes) entre les nœuds (sommets) du réseau. Un autre exemple est celui de deux files qui partagent une salle d'attente de C places. Elles peuvent être vues comme un LN avec deux types de réservations et une ressource de capacité C .

Modélisation stochastique de l'utilisation du réseau.

Les arrivées. Les demandes de réservation de type c arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ_c. Le temps qui sépare deux demandes de type c est donc aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ_c . Pour c variant dans $\mathcal{C}$, les différents processus de Poisson sont indépendants. Si une demande qui arrive n'est pas acceptée (selon un critère que nous détaillons plus loin), elle est perdue.

Les durées d'utilisation. Une demande acceptée monopolise les ressources pour une durée aléatoire de loi exponentielle dont nous prendrons le paramètre égal à 1 sans perte de généralité. Dans le modèle de base, les ressources sont libérées en même temps. Il existe des modèles (voir [34]) où les ressources sont libérées indépendamment. Nous exposons le cas des durées exponentielles mais certains résultats sont encore vrais pour des durées d'utilisation plus générales et donc pour des processus qui ne sont plus markoviens.

Politique d'acceptation des demandes. Une demande de réservation de type c est acceptée si pour tout type de ressource j il y a au moins $M(j,c)$ ressources libres. Les variantes sont nombreuses. Nous pouvons par exemple, imposer que la demande ne soit acceptée que si $M(j,c) + s(j,c)$ ressources (avec $s(j,c) > 0$) sont disponibles même si une fois acceptée la requête n'occupera effectivement que $M(j,c)$ ressources. C'est le cas lorsque certaines ressources sont utilisées de manière non exclusive ou dans les cas de "trunk reservation" (voir

[34]). Il s'agit de pénaliser certains types de demandes. Si nous souhaitons, par exemple, qu'une demande qui utilise beaucoup de ressources ne soit acceptée que si le réseau est peu chargé, nous prendrons des $s(j,c)$ grands. Nous notons $n_t(c)$ la variable aléatoire égale au nombre de réservations de type c en cours à l'instant t et définissons $n_t = (n_t(c),\ c \in \mathcal{C})$. Le processus de Markov des réservations en cours est $\{n_t,\ t \geq 0\}$. Le processus des ressources disponibles est noté $m_t = (m_t(j)\ ,\ j \in \mathcal{J})$ où $m_t(j)$ est le nombre de ressources de type j disponibles à l'instant t. Nous avons

$$m_t(j) = C(j) - \sum_{c\in\mathcal{C}} M(j,c)\ n_t(j)\ .$$

Si nous considérons le vecteur $C = (C(j)\ ,\ j \in \mathcal{J})$ et la matrice $M = (M(j,c))$ de dimension $|\mathcal{J}| \times |\mathcal{C}|$, il vient $m_t = C - M\ n_t$. Ainsi une demande de type c est acceptée si m_t appartient à un sous-ensemble M_c de $\mathbb{N}^{|\mathcal{J}|}$. Dans le cas le plus simple, nous prendrons $M_c = \{m \in \mathbb{N}^{|J|}\ ,\ \forall j\ m(j) \geq M(j,c)\}$. Dans la variante "trunk reservation" nous prendrons $M_c = \{m \in \mathbb{N}^{|J|}\ ,\ \forall j\ m(j) \geq M(j,c) + s(j,c)\}$. En ce qui concerne l'acceptation des demandes, la connaissance de m_t suffit mais dans le cas général elle ne permet pas de dire quels sont les types de réservations qui utilisent les ressources non disponibles. La connaissance de n_t apporte donc une information supplémentaire. De plus, m_t n'est pas en général un processus de Markov. Dans le cas le plus simple, le processus n_t peut être vu comme la troncature d'un processus réversible à l'ensemble $\mathcal{A}_C = \{n \in \mathbb{N}^{|\mathcal{C}|}\ ,\ Mn \leq C\}$. Il admet donc une unique mesure réversible ν_C donnée par

$$\nu_C(n) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{Z_C} \prod_{c\in\mathcal{C}} \frac{\lambda_c^{n(c)}}{n(c)!} & \text{si } n \in \mathcal{A}_C \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.22}$$

Notons que ce résultat se généralise à des durées d'utilisation de loi non exponentielle. La forme (4.22) est obtenue en conditionnant, par l'appartenance à $\mathcal{A}_C$, un produit de $|\mathcal{C}|$ variables indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_c . Dans ces modèles, nous pouvons également préciser une structure de graphe sous-jacente au partage des ressources.

Graphe d'interactions. Nous considérons le graphe dont les sommets sont les types de réservations. Deux sommets sont reliés par une arête si les types de réservations correspondants utilisent au moins une ressource de même type. Deux sommets c et c' sont donc voisins s'il existe j dans $\mathcal{J}$ tel que $M(j,c)$ et $M(j,c')$ sont strictement positifs. Cela signifie que c et c' peuvent éventuellement être en conflit pour l'utilisation des ressources. La construction de ce graphe ne tient pas compte des capacités $C(j)$. De plus, des systèmes différents peuvent conduire au même graphe d'interactions.

Liens avec les PU. Malgré les analogies entre ces modèles et les PU définis dans la section 4.1, il semble qu'il n'existe pas dans le cas général de passage immédiat entre les deux modélisations. Toutefois, dans certains cas particuliers, les deux modèles coïncident.

Un cas simple de LN qui correspond à un PU est le suivant. Les capacités sont toutes supposées égales à 1 de sorte que nous pouvons oublier les termes "types de" devant ressources et réservations. Soit donc $\mathcal{J}$ un ensemble de ressources et $\mathcal{C}$ un ensemble de réservations tels que pour tout j dans $\mathcal{J}$ et c dans $\mathcal{C}$, $M(j,c)$ est dans $\{0,1\}$. Une réservation c peut être identifiée au sous-ensemble J_c de $\mathcal{J}$ défini par

$$J_c = \{j \in \mathcal{J},\ M(j,c) = 1\}\ .$$

Dans ce LN, pour toute réservation c, $n_t(c)$ est dans $\{0,1\}$ et le processus $\{n_t,\ t \geq 0\}$ peut être identifié à un PU $\{\eta_t,\ t \geq 0\}$ particulier. L'ensemble des ressources est $R = \mathcal{J}$, celui des utilisateurs est $U = \mathcal{C}$. Chaque utilisateur u ne peut être que dans deux états $\emptyset$ ou $R_u = J_u$ et les taux $c(u,\eta,\gamma)$ sont définis par

$$c(u,\eta,\gamma) = \begin{cases} \lambda_u & \text{si} \quad \eta(u) = \emptyset\ ,\ \gamma = R_u \text{ et } \eta(v) \cap R_u = \emptyset\ ,\ \forall v \neq u \\ 1 & \text{si} \quad \eta(u) = R_u \\ 0 & \text{dans tout autre cas.} \end{cases} \tag{4.23}$$

Nous posons alors $n_t(u) = 0$ si et seulement si $\eta_t(u) = \emptyset$ et $n_t(u) = 1$ si et seulement si $\eta_t(u) = R_u$. En mécanique statistique, ce cas correspond aussi à un modèle dit *à particules dures*, d'activités $(\lambda_u)_{u \in U}$ que nous présentons dans la section 4.2.2. Lorsque tous les λ_u sont égaux à λ, nous retrouvons le PP sur le graphe d'interactions du LN. Chaque ressource j du LN est soit libre soit occupée et $m_t(j)$ est dans $\{0,1\}$. Le processus m_t des ressources disponibles peut donc être associé à un processus ζ_t sur $\mathcal{P}(R)$ avec $\zeta_t = \{j \in \mathcal{J},\ m_t(j) = 0\}$, qui représente l'ensemble des ressources occupées dans le PU à l'instant t.

Lorsque les capacités sont strictement plus grandes que 1, il semble difficile d'identifier un LN à un PU pour essentiellement deux raisons. Un LN adopte plutôt le point de vue des ressources que celui des utilisateurs. Si deux réservations peuvent avoir lieu simultanément elles ne peuvent être dues à un même utilisateur qui ne peut être dans deux états à la fois. Il faudrait donc associer chaque réservation possible à un seul utilisateur. Dans ce cas, si plusieurs réservations de même type peuvent avoir lieu simultanément (ce qui ne peut pas se produire quand les capacités sont égales à 1), la connaissance de n_t ne permet pas en général de savoir à quels utilisateurs elles correspondent. Il apparaît donc qu'un PU $\{\eta_t,\ t \geq 0\}$ contient plus d'informations. Dans un LN les différents types de ressources correspondent à des sous-ensembles de ressources non différentiables. Dans un PU toutes les ressources sont distinguables. C'est la deuxième raison pour laquelle il semble difficile de définir à partir d'un LN, un ensemble d'utilisateurs convenable. Inversement, seuls quelques cas particuliers de PU peuvent être vus comme des LN avec des capacités égales à 1. Ces cas généralisent celui du PP exposé ci-dessus. Soit donc un PU obtenu par troncature de PR individuels. Considérons un LN de capacités 1 pour lequel nous posons

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= R \cup U\ , \\ \mathcal{C} &= U \times (\mathcal{P}(R)\backslash\emptyset) \ = \ \{(u,\gamma),\ u \in U,\ \gamma \in \mathcal{P}(R),\ \gamma \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Dans les modèles de LN que nous avons envisagés, les ressources sont prises et libérées simultanément. Pour espérer retrouver une telle dynamique, il nous faut donc nous restreindre aux PU construits par troncature de PR du type de l'exemple 4.1.2 (“retour à l'état vide”, section 4.1). Pour $c = (u, \gamma)$ (avec $\gamma \neq \emptyset$) nous définissons alors

$$\lambda_c = \frac{b_u(\gamma)}{a_u(\gamma)} .$$

Nous pouvons identifier un tel PU $\{\eta_t,\ t \geq 0\}$ au processus $\{n_t,\ t \geq 0\}$ avec pour $c = (u, \gamma)$,

$$n_t((u,\gamma)) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } \eta_t(u) = \gamma \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si nous prenons pour $c = (u, \gamma)$, $M(j, c) = 1$ lorsque $j = u$ ou $j \in \gamma$, il y a clairement équivalence entre $\eta_t \in \mathcal{A}$ (où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des configurations admissibles pour un PU) et $n_t \in \mathcal{A}_C$.

Notons que pour ce qui est du calcul de la mesure stationnaire, l'équivalence entre LN et PU est plus générale. Soit un PU obtenu par troncature de PR réversibles avec une unique classe d'irréductibilité. Sa mesure réversible est

$$\forall \eta \in \mathcal{A}, \quad \nu(\eta) = Z^{-1} \prod_{u \in U} \pi_u(\eta(u)) \quad ,$$

où π_u est la mesure réversible du PR associé à u. Pour un tel PU, il existe un LN, *i.e.* un processus $\{n_t,\ t \geq 0\}$ de même mesure réversible ν. Il suffit de reprendre la construction précédente en posant pour $c = (u, \gamma)$, $\lambda_c = \pi_u(\gamma)$. Aussi d'éventuels résultats concernant l'équilibre d'un LN de capacités 1 sont encore valables pour les PU moyennant les transformations ci-dessus. Dans les LN, des quantités intéressantes s'expriment en fonction de la mesure ν_C, c'est-à-dire de la fonction de partition Z_C . Par exemple, la probabilité qu'une demande de réservation de type c soit perdue s'écrit simplement (voir [33])

$$1 - \frac{Z_{C - M\mathbf{1}_c}}{Z_C} , \tag{4.24}$$

où $\mathbb{1}_c$ est le vecteur indicé par $\mathcal{C}$ dont les composantes sont toutes nulles sauf celle d'indice c qui vaut 1. En termes de PU cela correspond, pour $c = (u, \gamma)$ à la probabilité que la demande des ressources γ par l'utilisateur u soit refusée. Ce qui s'écrit avec les notations de la section 4.1

$$1 - \frac{Z_{(U \setminus \{u\}, R \setminus \gamma)}}{Z_{(U,R)}} . \tag{4.25}$$

Pour des graphes quelconques, le calcul exact de Z_C est difficile. Il s'agit donc de trouver une autre approche évitant le calcul direct de cette quantité. La mesure ν_C est obtenue en tronquant $|\mathcal{C}|$ variables indépendantes de loi de Poisson. Une approximation naturelle de cette loi est obtenue en tronquant une loi normale multivariée. Dans [33], cette approximation est développée en considérant des systèmes dans lesquels les capacités $C(j)$ et les taux d'arrivées λ_c tendent vers l'infini (les rapports $C(j)/\lambda_c$ étant maintenus constants). Le comportement à la limite des probabilités de perte s'exprime alors simplement et fournit des informations intéressantes sur le réseau. Il semble difficile de donner un sens à ce genre de techniques pour les PU. Dans l'article de synthèse [33], d'autres techniques et problématiques propres au LN sont exposées.

4.2.2 Modèles de mécanique statistique

En physique comme en informatique apparaissent des systèmes complexes constitués d'un grand nombre d'éléments interagissant plus ou moins. Certains auteurs [41] ont ainsi fait le lien entre la mécanique statistique et l'étude de systèmes informatiques tels que les réseaux d'interconnexions. Dans ce qui précède nous l'avons également fait implicitement en parlant de fonction de partition pour la constante de normalisation Z . D'autres rapprochements sont possibles. Les modèles de Ising sont des modèles classiques utilisés en électromagnétisme. Les modèles de ressources partagées de la section 4.1 s'apparentent à une classe de modèles de Ising dits antiferromagnétiques. Des utilisateurs "voisins" sur le graphe d'interactions ne peuvent être dans le même état non vide simultanément et se "repoussent" un peu comme des spins de même signe dans le cas antiferromagnétique. L'analogie est toutefois limitée car même pour des modèles tels que le PP (systèmes de spins), il n'y a pas dans les modèles de ressources partagées la même symétrie que dans les modèles de Ising où les spins positifs et négatifs jouent des rôles similaires. De tels modèles peuvent encore s'interpréter comme des modèles de gaz où les particules localisées aux sommets d'un graphe ont tendance à se repousser. La valeur 1 est attribuée aux sommets occupés par une particule, la valeur 0 aux sites vides. La littérature est vaste sur les modèles de Ising et nombre de techniques employées pour le partage de ressources en sont inspirées. Un cas limite des modèles de gaz (de type Ising) est obtenu lorsque la répulsion entre particules est si forte que deux sites voisins ne peuvent être occupés simultanément. Un tel modèle est du type PP. Nous le présentons plus précisément ci-dessous. Pour illustrer le rapport avec les réseaux de communication, nous donnons ensuite une interprétation de certains paramètres de performance des réseaux en termes de grandeurs thermodynamiques.

Modèles à particules dures

Les modèles à particules dures ("hard-core lattice gaz models") sont des modèles utilisés en physique statistique pour représenter des gaz dont les particules sont "dures" et occupent un volume non négligeable. Les centres des particules sont localisés sur les sommets d'un graphe $G = (S, E)$. Un sommet prend la valeur 1 s'il est occupé par une particule et 0 sinon. Les particules de taille non négligeable ne peuvent se superposer c'est-à-dire que deux sites voisins du graphe ne peuvent être simultanément à 1 . Les configurations possibles sur le graphe G correspondent donc aux ensembles stables de G . Ce sont les configurations admissibles du PP sur G et nous notons donc encore $\mathcal{A}_G$ leur ensemble. Les modèles à particules dures les plus courants en physique statistique sont décrits dans [2]. Ils correspondent à des graphes G particuliers (grille en dimension 2, réseau triangulaire, *etc.*). Nous reprenons la présentation mathématique de ces modèles donnée dans [51]. Elle fait clairement apparaître le lien avec le PP. A chaque sommet x de G peut être associé un réel positif a_x appelé activité. Si G est fini, on appelle mesure à particules dures sur G d'activités $(a_x)_{x\in S}$ la mesure de probabilité ν_G donnée par

$$\nu_G(\eta) = \begin{cases} {Z_G}^{-1} \prod_{x\in S} {a_x}^{\eta(x)} & \text{si } \eta \in \mathcal{A}_G \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.26}$$

Cette mesure correspond clairement à la mesure réversible du LN ou du PU décrit en (4.23) avec $\lambda_x = a_x$, pour tout x dans S. Pour ce qui est de la détermination des mesures d'équilibre dans ces modèles et plus généralement dans des modèles de type PU construits par troncature, la quantité importante est la fonction de partition Z_G. Lorsque $a_x = \lambda$ pour tout x dans S, nous retrouvons le PP. Nous avons montré dans le chapitre 1 comment calculer dans ce cas la fonction de partition pour une classe de graphes dits échelles. Dans ce qui suit nous montrons comment elle est liée à d'autres grandeurs thermodynamiques qui peuvent s'interpréter en termes de ferromagnétisme ou de systèmes informatiques.

Grandeurs thermodynamiques et paramètres de performance

Nous nous intéressons donc à la fonction de partition Z_G d'un PP sur un graphe G fini, vu comme un modèle de gaz à particules dures, d'activités $a_x = \lambda, x \in S$. Une telle fonction est un polynôme en λ,

$$Z_G \;=\; \sum_{\eta \in \mathcal{A}_G} \lambda^{\sum_{x\in S}\eta(x)} \;=\; \sum_k a(k)\lambda^k,$$

où $a(k)$ est le nombre de configurations admissibles ayant exactement k sites à 1. Une configuration η dans $\mathcal{A}_G$ correspond à un état du gaz, d'énergie

$$H(\eta) = \sum_{x\in S} \eta(x).$$

Cette quantité est le nombre de philosophes actifs ou le nombre de réservations (requêtes) s'exécutant en parallèle lorsque le système est dans la configuration η. Elle représente le débit du réseau. Le coefficient $a(k)$ est donc le nombre d'états d'énergie k. Comme son nom l'indique, la fonction de partition détermine complètement l'équilibre du système en indiquant comment celui-ci est partitionné en différents niveaux d'énergie. La valeur moyenne $\mathbb{E}_{\nu_G}(H)$ est l'énergie globale du système (pour un modèle de gaz) et le débit moyen du réseau. Pour des modèles de Ising avec $\eta \in \{-1,1\}^S$, l'énergie $H(\eta)$ correspond au moment magnétique et son espérance à l'aimantation. L'entropie d'une mesure ν est la quantité

$$\frac{1}{|S|}\mathbb{E}_\nu(\log(\nu(\eta)))\ .$$

La mesure ν_G est la mesure de maximum d'entropie à $\mathbb{E}_{\nu_G}(H)$ fixé (voir [18]). Si nous divisons le débit moyen par le nombre total $|S|$ de sites, nous obtenons le débit moyen par nœud, ou en termes de gaz, la densité

$$\rho \;=\; \frac{\mathbb{E}_{\nu_G}(H)}{|S|}\ .$$

Les expressions ci-dessus dépendent du taux d'arrivée (ou de l'activité) λ. En mécanique statistique, on considère plutôt le potentiel chimique $\mu = \log\lambda$. Si nous notons alors $Z_G(\mu)$ la fonction de partition, la pression ou l'énergie libre est définie par

$$E(\mu) \;=\; \frac{1}{|S|}\log Z_G(\mu)\ .$$

Un exemple caractéristique de l'utilisation de la fonction de partition et de ses dérivées est la calcul de la densité

$$\rho \ = \ \frac{\mathbb{E}_{\nu_G}(H)}{|S|} \ = \ \frac{dE}{d\mu} \ = \ \frac{\lambda}{|S| Z_G} \frac{dZ_G}{d\lambda} \ .$$

De même nous avons

$$\frac{d^2 E}{d\mu^2} \ = \ \frac{Var(H)}{|S|} \ .$$

En ferromagnétisme cette quantité est la susceptibilité du système. La compressibilité d'un gaz est

$$\frac{1}{\rho}\frac{dE}{d\rho} \ = \ \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2 E}{d\mu^2} \ = \ \frac{|S| Var(H)}{\mathbb{E}_{\nu_G}(H)^2} \ .$$

En termes de réseau, d'autres quantités sont intéressantes. L'utilisation du réseau est la probabilité qu'il y ait au moins une communication en cours. Elle vaut

$$1 - \nu_G(0_G) \ = \ 1 - \frac{1}{Z_G} \ .$$

Le temps moyen d'occupation du philosophe x est la probabilité $\nu_G(\eta(x) = 1)$ dont nous avons donné une expression dans le chapitre 1. Enfin la probabilité qu'une demande qui arrive au site x soit refusée et perdue est la probabilité qu'un des voisins de x soit déjà à 1. Elle est donc donnée par

$$1 - \frac{(1+\lambda) Z_{G\backslash \overline{x}}}{Z_G} \ .$$

En termes de PU, cette probabilité est la probabilité que la demande des ressources R_x par l'utilisateur x soit refusée. Elle peut donc aussi se déduire de la formule (4.25) avec $u = x$ et $\gamma = R_x$. Les relations (4.8) et (4.10) conduisent finalement à l'expression ci-dessus. Le nombre moyen de demandes non acceptées au site x par unité de temps est

$$\lambda \left(1 - \frac{(1+\lambda) Z_{G\backslash \overline{x}}}{Z_G} \right) \ .$$

D'après [41], cette quantité correspond à la pression.

Appliquons ces formules pour le PP sur $G = K_n \times L_m$ dont nous notons la fonction de partition Z_{L_m}. Si x est un site de l'échelon g_i ($i = 1 \ldots m$) de G, le graphe $G \backslash \overline{x}$ a deux composantes connexes dont les fonctions de partition sont notées Y_{i-1} et Y_{m-i} de sorte que

$$Z_{G\backslash \overline{x}} \ = \ Y_{i-1} Y_{m-i} \ ,$$

avec $Y_0 = 1$. D'autre part, en appliquant la formule (4.12) avec $C = K_n$ nous avons

$$Z_{L_m} \ = \ Z_{L_{m-1}} + n\lambda Y_{m-1} \ .$$

D'où

$$Z_{G\backslash \overline{x}} \ = \ \frac{(Z_{L_i} - Z_{L_{i-1}})(Z_{L_{m-i+1}} - Z_{L_{m-i}})}{n^2 \lambda^2} \ ,$$

et finalement la probabilité de perte à un site x de g_i est

$$1 - \frac{(1+\lambda)\,(Z_{L_i} - Z_{L_{i-1}})(Z_{L_{m-i+1}} - Z_{L_{m-i}})}{n^2\lambda^2\, Z_{L_m}} ,$$

avec Z_{L_m} donnée par la formule (1.17) du chapitre 1.

Pour $G = K_n \times C_m$, la probabilité de perte est indépendante du site x. La formule (4.12) appliquée à $C = K_n$ donne

$$Z_G \;=\; Z_{L_{m-1}} + n\lambda Z_{G\setminus\overline{x}} \,.$$

D'où la probabilité de perte

$$1 - \frac{(1+\lambda)}{n\lambda}\left(1 - \frac{Z_{L_{m-1}}}{Z_G}\right) ,$$

avec $Z_{L_{m-1}}$ et Z_G donnés respectivement par (1.17) et (1.19) du chapitre 1.

Ces résultats témoignent de l'importance de la fonction de partition. Nous avons donné et utilisé des exemples de calculs de cette fonction pour le PP. Dans la section suivante, nous nous intéressons au calcul de la fonction de partition pour des PU plus généraux.

4.3 Algorithme de calcul de la fonction de partition de PU définis par troncature

Nous considérons des PU définis (comme en (4.2)) par troncature de PR individuels, réversibles et possédant une unique classe d'irréductibilité. Nous reprenons les notations de la section 4.1. Pour tout u dans U, nous notons π_u l'unique mesure réversible du PR individuel associé à u. La mesure réversible du PU est alors la mesure ν définie par

$$\forall \eta \in \mathcal{A}, \quad \nu(\eta) = Z^{-1} \prod_{u\in U} \pi_u(\eta(u)) \quad ,$$

avec

$$Z = \sum_{\eta\in\mathcal{A}} \prod_{u\in U} \pi_u(\eta(u)) \quad .$$

Nous proposons une méthode de calcul de la fonction de partition Z (plus exactement de la constante $(\prod_{u\in U}\pi_u(\emptyset))\,Z$) pour ces PU. Nous montrons que pour des PU particuliers sur des lignes, des cycles ou des arbres, ce procédé permet d'obtenir des formules explicites pour Z. Dans le cas des arbres, ceci ouvre la voie à une étude du phénomène de transition de phase que nous précisons dans le chapitre 5.

Nous commençons par montrer que pour ce qui est du calcul des mesures réversibles π_u, il est toujours possible de se ramener à un processus de type "retour à l'état vide" (exemple 2.2, section 4.1).

Proposition 4.3.1 *Soit un PR sur $\mathcal{P}(R)$ réversible et possédant une unique classe d'irréductibilité contenant l'état vide $\emptyset$. Soit π sa mesure réversible. Il existe un PR sur $\mathcal{P}(R)$ de type "retour à l'état vide" dont la mesure réversible est π.*

Démonstration. Soient $\lambda(\alpha,\beta)$ les taux du PR considéré. Soit α un sous-ensemble de ressources atteignable de l'état $\emptyset$. Il existe $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans $\mathcal{P}(R)$ tels que $\alpha_0 = \emptyset$, $\alpha_n = \alpha$ et

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda(\alpha_i, \alpha_{i+1})}{\lambda(\alpha_{i+1}, \alpha_i)} \; > \; 0 \; .$$

Le processus étant réversible, le produit ne dépend pas de la façon dont on passe de $\emptyset$ à α. Ainsi, nous pouvons définir sans ambiguïté, pour tout α dans $\mathcal{P}(R)$

$$\rho(\alpha) \quad = \quad \begin{cases} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda(\alpha_i,\alpha_{i+1})}{\lambda(\alpha_{i+1},\alpha_i)} & \text{si } \alpha \text{ est atteignable} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le processus de type "retour à l'état vide" de taux $\lambda'(\alpha,\beta)$ définis par

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{P}(R), \quad \lambda'(\alpha,\beta) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \emptyset \\ \rho(\beta) & \text{si } \alpha = \emptyset \\ 0 & \text{dans tous les autres cas,} \end{cases}$$

a pour mesure réversible π' avec

$$\forall \alpha \in \mathcal{P}(R), \quad \pi'(\alpha) = \pi'(\emptyset)\rho(\alpha) \quad ,$$

et

$$\pi'(\emptyset)^{-1} = 1 + \sum_{\alpha \neq \emptyset} \rho(\alpha) \quad .$$

Il est alors facile de voir que $\pi' = \pi$.

■

Illustrons ceci sur les exemples de la section 4.1. Dans le cas de l'exemple 2.1 ("ressources indépendantes") nous avions

$$\begin{aligned} \forall \alpha \neq \emptyset, \qquad \pi_u(\alpha) \quad &= \quad \pi_u(\emptyset) \prod_{r\in\alpha} \frac{b_u(r)}{a_u(r)} \, , \\ \pi_u(\emptyset) \quad &= \quad \left(1 + \sum_{\alpha\neq\emptyset} \prod_{r\in\alpha} \frac{b_u(r)}{a_u(r)}\right)^{-1} \quad . \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser (la notation $\rho(\{r\})$ a été simplifiée en $\rho(r)$)

$$\forall \alpha \in \mathcal{P}(R), \alpha \neq \emptyset, \quad \rho(\alpha) \quad = \quad \prod_{r\in\alpha} \frac{b_u(r)}{a_u(r)} \quad = \quad \prod_{r\in\alpha} \rho(r) \; .$$

De même dans l'exemple 2.3, il suffit de poser $\rho(\alpha) = \mu_u(\alpha)$.

Pour chaque u dans U, nous supposons donc donnés les taux $\lambda_u(\alpha,\beta)$ du PR individuel associé à u. A partir de ces taux nous définissons les quantités $\rho_u(\alpha)$ comme ci-dessus. Il sera commode de poser $\rho_u(\emptyset) = 1$. Nous considérons les ensembles individuels de ressources

R_u déjà définis en (4.4) et les ensembles U_r des utilisateurs qui ont accès à la ressource r (*cf* (4.15)). Pour des PU constitués d'une seule ressource r partagée par un ensemble U_r d'utilisateurs, à chaque u dans U_r est associé un processus réversible à valeurs dans $\{\emptyset, \{r\}\}$ pour lequel nous pouvons définir les quantités $\rho_u(r)$. Soit Z_r la fonction de partition d'un tel PU. Sa mesure réversible est

$$\nu(\eta) = \begin{cases} Z_r^{-1}\rho_u(r) & \text{si } \eta(u) = \{r\} \text{ et } \eta(v) = \emptyset, \forall v \neq u \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec

$$Z_r = 1 + \sum_{u \in U_r} \rho_u(r)\ . \tag{4.27}$$

En termes de graphe d'interactions ce cas correspond au graphe complet K_{m_r} où m_r est le nombre d'utilisateurs de r, $|U_r|$.

Considérons maintenant des PU constitués de plusieurs ressources prises de manière indépendante. Pour chaque utilisateur, le PR associé est un processus correspondant au cas de l'exemple 2.1 ("ressources indépendantes"). Dans ce cas, pour tout α dans $\mathcal{P}(R)$, $\rho_u(\alpha) = \prod_{r\in\alpha} \rho_u(r)$. Nous notons Z_I la fonction de partition d'un tel PU. Elle s'exprime à l'aide des fonctions de partition Z_r données par (4.27),

$$Z_I = \prod_{r \in R} Z_r\ . \tag{4.28}$$

Sa mesure réversible est

$$\nu(\eta) = \begin{cases} Z_I^{-1} \prod_{u\in U} \rho_u(\eta(u)) & \text{si } \eta \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour des PU plus généraux, $\rho_u(\alpha) = \prod_{r\in\alpha} \rho_u(r)$ n'est plus vrai et la fonction de partition n'est plus donnée par (4.28). Il est cependant possible d'obtenir son expression en calculant d'abord l'expression (4.28) de Z_I en fonction des quantités $\rho_u(r), u \in U, r \in R$ (comme si nous étions dans le cas précédent), puis en remplaçant dans cette expression les produits $\prod_{r\in\alpha} \rho_u(r)$ par $\rho_u(\alpha)$. Une fois les remplacements effectués, nous pouvons tenir compte des valeurs numériques (éventuellement nulles) des $\rho_u(\alpha)$. Sans connaissances particulières sur la structure du système, la méthode ne sera utilisable que pour des cas de taille assez petite. Si $n = |R|$ est le nombre de ressources et $m_r = |U_r|$ le nombre d'utilisateurs de la ressource r, il y a $\prod_{r\in R}(m_r + 1)$ termes dans l'expression de Z_I. Par exemple, lorsque le système est représentable par un graphe où les sommets sont les utilisateurs et les arêtes sont les ressources, nous avons pour toute ressource r, $m_r = 2$ (une arête correspond à deux sommets) et le produit ci-dessus vaut 3^n. Toutefois, la connaissance de la structure et la prise en compte des symétries existantes pourront simplifier le calcul de la fonction de partition. Dans ce qui suit nous présentons des cas pour lesquels nous avons obtenu des formules explicites. Ces cas sont représentables par un graphe (ligne L_k, cycle C_k ou arbre A_k^d) et chaque ressource y est partagée par deux utilisateurs. Nous vérifions également que pour des valeurs particulières des taux nous retrouvons les résultats obtenus pour le PP sur ces mêmes graphes. Il s'agit d'illustrer l'algorithme précédent mais il faut cependant remarquer que dans ces cas les équations (4.32) et (4.33) ci-dessous peuvent aussi être obtenues à partir des relations (4.6) et (4.16) de la section 4.1.

Considérons un PU du type de celui de l'exemple 4.1.4. Les utilisateurs sont localisés aux sommets d'une ligne L_k ou d'un cycle C_k. Les ressources sont situées à droite et à gauche de chaque utilisateur et sont représentées par les arêtes de L_k ou C_k. Chaque utilisateur u a accès à deux ressources g_u et d_u de sorte que $R_u = \{g_u, d_u\}$. Le partage des ressources se traduit par $g_u = d_{u-1}$. Les utilisateurs sont supposés avoir tous le même comportement. Chaque PR individuel est une version d'un processus de Markov réversible à valeurs dans $\{\emptyset, g, d, gd\}$ où g_u et d_u ont été identifiés à g et d et $\{g, d\}$ à gd. De par la proposition 4.3.1, nous pouvons définir les quantités $\rho_u(g)$, $\rho_u(d)$, $\rho_u(gd)$ ($\rho_u(\emptyset) = 1$) que nous supposerons indépendantes de u et que nous noterons ρ_g, ρ_d et ρ_{gd}. Soit Z_{L_k} et Z_{C_k} les fonctions de partition pour un tel modèle sur L_k et C_k.

Proposition 4.3.2 *Les fonctions de partition Z_{L_k} et Z_{C_k} sont données par*

$$\forall k \geq 1, \quad Z_{L_k} = \frac{1}{2^k\sqrt{\Delta}}\left((1+\rho_g+\rho_d+\sqrt{\Delta})^k - (1+\rho_g+\rho_d-\sqrt{\Delta})^k\right) \tag{4.29}$$

$$\forall k \geq 3, \quad Z_{C_k} = \frac{1}{2^k}\left((1+\rho_g+\rho_d+\sqrt{\Delta})^k + (1+\rho_g+\rho_d-\sqrt{\Delta})^k\right) \tag{4.30}$$

avec $\Delta = 1 + 2(\rho_g+\rho_d) + (\rho_g-\rho_d)^2 + 4\rho_{gd}$.

Avant de démontrer ces formules, remarquons que nous retrouvons bien certains cas connus. Si $\rho_{gd} = \rho_g\rho_d$, nous retrouvons le cas de $k-1$ ressources indépendantes avec

$$Z_{L_k} = (1+\rho_g+\rho_d)^{k-1}$$

et celui de k ressources indépendantes avec

$$Z_{C_k} = (1+\rho_g+\rho_d)^k \ .$$

Si $\rho_g = \rho_d = 0$ et $\rho_{gd} = \lambda$, nous trouvons $Z_{L_k} = Z^{PP}_{L_{k-2}}$ où nous notons ici $Z^{PP}_{L_{k-2}}$ la fonction de partition du PP sur L_{k-2} (lorsque $n = 1$ la formule (1.17) se simplifie). Ce résultat n'est pas surprenant car poser $\rho_g = \rho_d = 0$ et $\rho_{gd} = \lambda$ revient à bloquer à $\emptyset$ les utilisateurs aux extrémités de L_k. Pour les autres utilisateurs qui se comportent comme dans le PP, tout se passe donc comme si les utilisateurs des extrémités n'existaient pas. Pour les cycles, nous retrouvons bien $Z_{C_k} = Z^{PP}_{C_k}$.

Démonstration. Considérons d'abord le cas où les utilisateurs sont situés aux sommets de L_k et se partagent donc $k-1$ ressources. Notons $Z^I_{L_k}$ l'expression de la fonction de partition lorsque les ressources sont indépendantes et T l'opération qui consiste à remplacer dans l'expression de $Z^I_{L_k}$ les produits $\prod_{r\in\alpha}\rho_u(r)$ par $\rho_u(\alpha)$. Nous écrirons $Z_{L_k} = T(Z^I_{L_k})$. Nous avons

$$Z^I_{L_k} = \prod_{u=1}^{k-1}(1+\rho_u(d)+\rho_{u+1}(g)) = Z^I_{L_{k-1}}(1+\rho_{k-1}(d)+\rho_k(g)) \ .$$

D'où

$$Z^I_{L_k} = Z^I_{L_{k-1}}\rho_{k-1}(d) + Z^I_{L_{k-1}}(1+\rho_k(g)) \, .$$

L'expression $Z^I_{L_{k-1}}$ est indépendante de l'utilisateur k de sorte que

$$T(Z^I_{L_{k-1}}(1+\rho_k(g))) = Z_{L_{k-1}}(1+\rho_g) \, .$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} Z^I_{L_{k-1}}\rho_{k-1}(d) &= (Z^I_{L_{k-1}} - Z^I_{L_{k-2}}\rho_{k-1}(g) + Z^I_{L_{k-2}}\rho_{k-1}(g))\,\rho_{k-1}(d) \\ &= (Z^I_{L_{k-1}} - Z^I_{L_{k-2}}\rho_{k-1}(g))\,\rho_{k-1}(d) \;+\; Z^I_{L_{k-2}}\;\rho_{k-1}(g)\rho_{k-1}(d) \, . \end{aligned}$$

L'expression $Z^I_{L_{k-1}} - Z^I_{L_{k-2}}\rho_{k-1}(g)$ ne dépend pas de l'utilisateur $k-1$ et

$$T((Z^I_{L_{k-1}} - Z^I_{L_{k-2}}\rho_{k-1}(g))\rho_{k-1}(d)) = T(Z^I_{L_{k-1}} - Z^I_{L_{k-2}}\rho_{k-1}(g))\,\rho_d = (Z_{L_{k-1}} - Z_{L_{k-2}}\;\rho_g)\,\rho_d \, .$$

Enfin $T(Z^I_{L_{k-2}}\rho_{k-1}(g)\rho_{k-1}(d)) = Z_{L_{k-2}}\rho_{gd}$. D'où

$$T(Z^I_{L_{k-1}}\rho_{k-1}(d)) \;=\; (Z_{L_{k-1}} - Z_{L_{k-2}}\rho_g)\rho_d + Z_{L_{k-2}}\rho_{gd} \, , \tag{4.31}$$

et finalement

$$Z_{L_k} \;=\; (1+\rho_g+\rho_d)Z_{L_{k-1}} + (\rho_{gd} - \rho_g\rho_d)Z_{L_{k-2}} \, . \tag{4.32}$$

En utilisant $Z_{L_1} = 1$ et $Z_{L_2} = 1+\rho_g+\rho_d$, la formule (4.29) s'en déduit facilement.
Si $\rho_{gd} = \rho_g\rho_d$, la récurrence (4.32) redonne bien la fonction de partition du cas “ressources indépendantes”. De plus si nous prenons $\rho_g = \rho_d = 0$ et $\rho_{gd} = \lambda$, l'équation (4.32) devient

$$Z_{L_k} = Z_{L_{k-1}} + \lambda Z_{L_{k-2}}$$

avec $Z_{L_1} = Z_{L_2} = 1$. Nous retrouvons l'équation de récurrence (1.25) qui définit la fonction de partition $Z^{PP}_{L_k}$ du PP sur L_k. Nous avons $Z^{PP}_{L_0} = 1$ et $Z^{PP}_{L_1} = 1+\lambda$ de sorte que nous pouvons convenir de $Z^{PP}_{L_{-1}} = 1$. Nous avons alors une autre manière de montrer (par récurrence) que $Z_{L_k} = Z^{PP}_{L_{k-2}}$.

Considérons à présent le cas des cycles C_k. Par analogie avec ce qui précède nous notons $Z^I_{C_k}$ la fonction de partition du cas “ressources indépendantes”. Elle vérifie pour $k \geq 3$

$$\begin{aligned} Z^I_{C_k} &= Z^I_{L_k}(1+\rho_1(g)+\rho_k(d)) \\ &= Z^I_{L_k} + Z^I_{L_k}\rho_1(g) + Z^I_{L_k}\rho_k(d) \, . \end{aligned}$$

Nous avons déjà calculé en (4.31) (à l'indice k près) la quantité

$$T(Z^I_{L_k}\rho_k(d)) = (Z_{L_k} - Z_{L_{k-1}}\rho_g)\rho_d + Z_{L_{k-1}}\rho_{gd} \, .$$

La quantité $T(Z^I_{L_k}\rho_1(g))$ s'obtient par symétrie, en changeant 1 en k et g en d. Ainsi

$$T(Z^I_{L_k}\rho_1(g)) = (Z_{L_k} - Z_{L_{k-1}}\rho_d)\rho_g + Z_{L_{k-1}}\rho_{gd}.$$

Après simplifications

$$Z_{C_k} = Z_{L_{k+1}} + (\rho_{gd} - \rho_g\rho_d) Z_{L_{k-1}} , \tag{4.33}$$

d'où nous pouvons déduire la formule (4.30).
Lorsque $\rho_g = \rho_d = 0$ et $\rho_{gd} = \lambda$, l'équation (4.33) devient

$$\begin{aligned} Z_{C_k} &= Z_{L_{k+1}} + \lambda Z_{L_{k-1}} \\ &= Z^{PP}_{L_{k-1}} + \lambda Z^{PP}_{L_{k-3}} . \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien $Z_{C_k} = Z^{PP}_{C_k}$ d'après l'équation (1.25).

■

Les cas de L_k et C_k se traitent facilement car pour passer à l'indice $k+1$ il suffit d'ajouter une arête dont l'un des sommets est pendant. Ceci revient à ajouter une ressource à l'un (et un seul) des utilisateurs. C'est d'ailleurs pour cette même raison que les équations (4.32) et (4.33) peuvent aussi être obtenues à partir de (4.6) et (4.16). Le même principe s'applique au cas des arbres étudiés dans la section 1.5 du chapitre 1. Les utilisateurs sont localisés aux sommets de l'arbre régulier A^d_k, de degré d et de hauteur k. Tout utilisateur u (à l'exception de la racine de l'arbre) peut utiliser $d+1$ ressources $\{r^0_u, r^1_u, \ldots, r^d_u\}$. Pour $i = 1 \ldots d$, il partage la ressource r^i_u avec un utilisateur "fils" u_i. Cela correspond aux quantités $\rho_u(r^i_u)$ que nous supposons pour simplifier toutes égales à une quantité notée $\rho_u(f)$. L'utilisateur u partage la ressource r^0_u avec un utilisateur "père" et nous posons $\rho_u(r^0_u) = \rho_u(p)$. Nous notons aussi, pour $j = 1, \ldots, d$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_j \leq d$, $\rho_u(\{r^{i_1}_u, \ldots, r^{i_j}_u\}) = \rho_u(jf)$ et $\rho_u(\{r^0_u, r^{i_1}_u, \ldots, r^{i_j}_u\}) = \rho_u(pjf)$. Cela signifie que ces quantités ne dépendent que du nombre de ressources "fils" et "père". Dans la suite, nous supposons de plus ces quantités indépendantes de u et nous les notons ρ_{jf} et ρ_{pjf}. Soit Z_{A_k} la fonction de partition pour un tel modèle sur l'arbre A^d_k.

Proposition 4.3.3 *Pour $k \geq 1$, la fonction de partition Z_{A_k} est donnée par les équations de récurrence suivantes*

$$Z_{A_k} = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \rho_{if}\, (Z_{A_{k-1}})^i (Z_{A_{k-1}} + X_{k-1})^{d-i} \tag{4.34}$$

$$X_k = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \rho_{pif}\, (Z_{A_{k-1}})^i (Z_{A_{k-1}} + X_{k-1})^{d-i} \tag{4.35}$$

avec $Z_0 = 1$ et $X_0 = \rho_p$.

Démonstration. Notons u_0 la racine de A^d_k et $u_1, \ldots, u_d$ ses sommets "fils" adjacents. Chacun des u_i peut lui-même être vu comme la racine d'un sous-arbre A^d_{k-1}. Pour passer à A^d_k, nous ajoutons une ressource à chaque u_i. Les ressources ajoutées sont partagées avec l'utilisateur u_0. Ainsi, passer à l'arbre A^d_k consiste à ajouter aux d sous-arbres A^d_{k-1} de racine u_i un graphe en étoile à d branches. Notons $Z^I_{A_k}(u)$ la fonction de partition pour l'arbre A^d_k de racine u lorsque les ressources sont prises indépendamment. Notons E^I la fonction de partition pour le graphe en étoile de sommet central u_0 dont les d voisins sont $u_1, \ldots, u_d$. Nous avons

$$Z^I_{A_k}(u_0) = (\prod_{i=1}^{d} Z^I_{A_{k-1}}(u_i))\ E^I,$$

avec

$$E^I = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (\rho_{u_0}(f))^i \sum_{j=0}^{d-i} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le d} \rho_{u_{i_1}}(p) \ldots \rho_{u_{i_j}}(p) \, .$$

Ainsi $Z^I_{A_k}(u_0)$ est donnée par

$$\sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (\rho_{u_0}(f))^i \sum_{j=0}^{d-i} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le d} \{\rho_{u_{i_1}}(p) Z^I_{A_{k-1}}(u_{i_1}) \ldots \rho_{u_{i_j}}(p) Z^I_{A_{k-1}}(u_{i_j}) \prod_{i \notin \{i_1, \ldots, i_j\}} Z^I_{A_{k-1}}(u_i)\} \, . \quad (4.36)$$

En posant $X_{k-1} = T(\rho_{u_{i_j}}(p) Z^I_{A_{k-1}}(u_{i_j}))$ qui ne dépend pas de u_{i_j}, nous en déduisons

$$Z_{A_k} = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \rho_{if} \sum_{j=0}^{d-i} \binom{d-i}{j} (Z_{A_{k-1}})^{d-j} (X_{k-1})^j \, .$$

L'équation (4.34) en découle. Par ailleurs, nous pouvons écrire

$$X_k = T(\rho_{u_0}(p) Z^I_{A_k}(u_0))$$

et l'équation (4.36) conduit également à l'équation (4.35).

■

Les équations (4.34) et (4.35) avec $Z_0 = 1$ et $X_0 = \rho_p$ permettent de calculer Z_{A_k} par récurrence.

Dans ce qui suit, nous considérons le cas particulier où seules les quantités $\rho_u(p)$, $\rho_u(df)$ et $\rho_u(pdf)$ sont non nulles. Nous les noterons alors respectivement ρ_p, ρ_f et ρ_{pf}. Cela signifie qu'un utilisateur utilise soit toutes soit aucune des ressources communes avec ses "fils". Ce cas généralise, en quelque sorte, le PU sur L_k de la proposition 4.3.2. Les quantités ρ_p, ρ_f, ρ_{pf} jouent le rôle de ρ_g, ρ_d, ρ_{gd}.

Proposition 4.3.4 *Pour $k \geq 2$,*

$$Z_{A_k} = \rho_f (Z_{A_{k-1}})^d + ((1+\rho_p) Z_{A_{k-1}} + (\rho_{pf} - \rho_p \rho_f)(Z_{A_{k-2}})^d)^d \quad (4.37)$$

avec $Z_{A_0} = 1$ et $Z_{A_1} = \rho_f + (1+\rho_p)^d$.

Démonstration. Dans ce cas les équations (4.34) et (4.35) se simplifient en

$$Z_{A_k} = \rho_f (Z_{A_{k-1}})^d + (X_{k-1} + Z_{A_{k-1}})^d \quad (4.38)$$
$$X_k = \rho_{pf} (Z_{A_{k-1}})^d + \rho_p (X_{k-1} + Z_{A_{k-1}})^d \quad (4.39)$$

Nous en déduisons facilement (4.37).

■

Remarquons que lorsque $d = 1$, l'équation (4.37) redonne bien l'équation (4.32) du cas linéaire. Pour d quelconque, lorsque $\rho_f = \rho_p = 0$ et $\rho_{pf} = \lambda$, (4.37) devient

$$Z_{A_k} = (Z_{A_{k-1}} + \lambda (Z_{A_{k-2}})^d)^d$$

avec $Z_{A_0} = Z_{A_1} = 1$ et $Z_{A_2} = (1+\lambda)^d$. Or pour le PP sur A_k, nous avons (1.31), *i.e.*

$$Z^{PP}_{A_k} = (Z^{PP}_{A_{k-1}})^d + \lambda (Z^{PP}_{A_{k-2}})^{d^2}$$

avec $Z^{PP}_{A_{-1}} = 1$ et $Z^{PP}_{A_1} = 1+\lambda$. D'où $Z_{A_1} = (Z^{PP}_{A_{-1}})^d$, $Z_{A_2} = (Z^{PP}_{A_0})^d$ et par récurrence

$$Z_{A_k} = (Z^{PP}_{A_{k-2}})^d \, .$$

Cela vient du fait que les utilisateurs des feuilles et de la racine de A^d_k sont fixés à $\emptyset$ lorsque $\rho_f = \rho_p = 0$. .

A partir des fonctions de partition nous pouvons calculer d'autres quantités grâce notamment aux relations générales démontrées dans la section 4.1. Nous considérons par exemple, la probabilité qu'un utilisateur soit dans l'état vide et la probabilité qu'un ensemble de ressources soit libre.

Pour un PU sur L_k, la probabilité que l'utilisateur u_k de l'extrémité droite de L_k soit dans l'état vide est donnée (*cf.* (4.7)) par

$$1 - \rho_g \frac{Z_{L_{k-1}}}{Z_{L_k}} \;=\; \frac{(1+\rho_d) Z_{L_{k-1}} + (\rho_{gd} - \rho_g \rho_d) Z_{L_{k-2}}}{Z_{L_k}} \, .$$

Fixer u_k à $\emptyset$ revient à prendre $\rho_k(g) = 0$ et l'expression au dénominateur s'obtient encore facilement en reprenant le calcul qui mène à l'équation (4.32) avec $\rho_k(g) = 0$. Elle se retrouve également en appliquant les équations (4.6) et (4.16) avec $u = u_k$ et $\gamma = R_{u_k}$.

De même pour un PU sur C_k, en reprenant les calculs avec $\rho_1(d) = \rho_{k+1}(g) = 0$, nous pouvons montrer que la probabilité qu'un utilisateur soit inactif est

$$\frac{(1+\rho_g+\rho_d+\rho_{gd}) Z_{L_{k-1}} + (\rho_{gd} - \rho_g \rho_d) Z_{L_{k-2}}}{Z_{C_k}} \, .$$

Pour les arbres A^d_k, nous notons α_k la probabilité que la racine u_0 soit dans l'état vide. Fixer la racine à $\emptyset$ revient à poser $\rho_{u_0}(f) = 0$. D'où

$$\alpha_k = \frac{(Z_{A_{k-1}} + X_{k-1})^d}{Z_{A_k}} \, .$$

En utilisant (4.38) et (4.39), après simplifications nous avons

$$\alpha_k \;=\; \left(1 + \frac{\rho_f^{d+1}}{(\rho_f + \rho_{pf} + (\rho_p \rho_f - \rho_{pf})\alpha_{k-1})^d}\right)^{-1} \, . \tag{4.40}$$

Si $\rho_f = \rho_p = 0$ alors $\alpha_k = 1$ ce qui est cohérent puisque l'utilisateur à la racine est contraint d'être à $\emptyset$. De même si $\rho_{pf} = \rho_f \rho_p$, nous retrouvons le cas des ressources indépendantes,

$$\alpha_k = \frac{(1+\rho_p)^d}{\rho_f + (1+\rho_p)^d} \, .$$

Grâce à la relation (4.17) nous avons aussi facilement les probabilités suivantes. Pour L_k, si nous numérotons par ordre croissant les ressources d'une extrémité à l'autre de L_k, la probabilité que la i-ème ressource soit disponible est

$$\frac{Z_{L_i}\ Z_{L_{k-i}}}{Z_{L_k}} .$$

Pour les cycles C_k la probabilité qu'une ressource soit disponible est

$$\frac{Z_{L_k}}{Z_{C_k}} .$$

Enfin pour A_k^d, nous considérons les ressources du niveau m. Les ressources auxquelles la racine a accès sont, par exemple, les ressources du niveau 1. Pour $m = 1 \ldots k$, la probabilité que les ressources du niveau m soient libres est

$$\frac{Z_{A_{m-1}}\ (Z_{A_{k-m}})^d}{Z_{A_k}} .$$

Une relation de réccurence telle que (4.40) est utile dans l'étude de la transition de phase pour ces modèles lorsque k tend vers l'infini. Il s'agit d'étudier la limite de la suite α_k. Lorsqu'il y a unicité de la mesure réversible, cette suite converge. Remarquons qu'étudier le sous-arbre fini A_k^d revient à prendre pour condition de bord des utilisateurs au niveau $k+1$ dans l'état $\{p\}$. Comme pour le PP, nous développons ces questions dans le chapitre 5.

Dans la section suivante nous illustrons l'application de techniques de comparaison stochastique aux processus d'utilisateurs et de ressources.

4.4 Comparaison stochastique et modèles de ressources partagées

4.4.1 Processus d'utilisateurs sur $\mathbb{Z}$

Nous utilisons les outils de comparaison stochastique développés dans le chapitre 3 pour prouver un résultat d'ergodicité pour une classe de PU sur $\mathbb{Z}$. Ce résultat généralise un théorème de [54] pour le PP sur $\mathbb{Z}$. Il justifie l'utilisation de méthodes statistiques pour évaluer les performances des systèmes concernés. En particulier, nous parlons en fin de partie de la possibilité de calculer les variances des estimateurs des paramètres de performance.

Les processus que nous considérons sont encore des extensions du réseau cyclique défini dans l'exemple 4.1.4 de la section 4.1, au réseau infini sur $\mathbb{Z}$. Ce sont des PU définis (comme dans l'équation (4.2)) par troncature de PR réversibles avec une seule classe d'irréductibilité. Les utilisateurs sont indicés par $\mathbb{Z}$ et se comportent isolément tous de la même façon. Les PR individuels sont des versions d'un même processus de Markov sur l'ensemble $\{\emptyset, g, d, gd\}$ dont les taux sont notés $\lambda(\alpha, \beta)$. Nous supposons que les ressources ne peuvent être échangées instantanément, *i.e.*

$$\lambda(g, d) = \lambda(d, g) = 0.$$

Nous considérons alors le PU sur
$$X = \bigotimes_{u \in \mathbb{Z}} \mathcal{P}(R_u)$$
de taux,

$\forall u \in \mathbb{Z},\ \forall \eta \in \mathcal{A},\ \forall \gamma \in \mathcal{P}(R_u),$
$$c(u,\eta,\gamma) = \begin{cases} \lambda_u(\eta(u),\gamma) & \text{si } \gamma \cap \eta(u-1) = \emptyset \text{ et } \gamma \cap \eta(u+1) = \emptyset \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.41}$$

D'après la proposition 3.1.3 du chapitre 3, la réversibilité du PU sur $\mathbb{Z}$ est assurée par la réversibilité des PR individuels. L'application des résultats de comparaison stochastique aux PU n'est pas directe. L'ordre naturel induit par l'inclusion dans chaque ensemble R_u ne donne pas de conclusions satisfaisantes. En effet, prenons par exemple pour η la configuration vide et pour ζ la configuration $\eta_{u-1}^{g_u}$. Lorsque la configuration du système est η l'utilisateur u peut prendre la ressource g_u avec un taux $\lambda_u(\emptyset, g_u)$ strictement positif alors que ce taux est nul lorsque la configuration du système est ζ. Il nous est donc impossible d'appliquer les résultats de la section 3.2 du chapitre 3 pour l'ordre usuel. Il nous faut considérer un autre ordre sur X. Une idée naturelle consiste à inverser l'ordre un site sur deux (par exemple aux sites impairs) comme dans [54]. L'ordre ainsi obtenu est noté $\preceq$. Nous avons $\eta \preceq \zeta$ si et seulement si $\eta(u) \subset \zeta(u)$ pour tout u pair et $\eta(u) \supset \zeta(u)$ pour tout u impair dans $\mathbb{Z}$. Pour cet ordre, les conditions nécessaires et suffisantes de monotonie du PU global s'expriment localement, *i.e.* à l'aide des taux des PR individuels. Lorsque ces PR sont tous des versions d'un même processus de base de taux $\lambda(\alpha,\beta)$ ces conditions se réduisent à
$$\begin{aligned} \lambda(\emptyset,g) + \lambda(\emptyset,gd) &\le \lambda(d,gd) \\ \lambda(\emptyset,d) + \lambda(\emptyset,gd) &\le \lambda(g,gd) \\ \lambda(gd,\emptyset) + \lambda(gd,g) &\le \lambda(d,\emptyset) \\ \lambda(gd,\emptyset) + \lambda(gd,d) &\le \lambda(g,\emptyset) \end{aligned} \tag{4.42}$$
Notons que les conditions ci-dessus sont exactement les conditions nécessaires et suffisantes de monotonie du PR individuel pour l'ordre induit par l'inclusion sur $\mathcal{P}(R_0)$ (voir la proposition 3.2.2 du chapitre 3). Dans ce cas la monotonie de chaque PR individuel implique la monotonie du PU global.

Rappelons qu'un processus de Feller est ergodique si quelle que soit la mesure initiale il converge vers une mesure stationnaire unique (*cf* [36]). Pour un PU réversible, invariant par translation, l'ergodicité garantit aux utilisateurs un accès aux ressources équitable.

Proposition 4.4.1 *Un PU sur $\mathbb{Z}$ défini comme en (4.41) par troncature de PR individuels qui sont des copies d'un même PR de base réversible avec une seule classe d'irréductibilité, est invariant par translation au sens de (4.5) et est ergodique si ce PR est monotone (conditions (4.42)).*

Démonstration. Une fois la monotonie assurée pour un ordre donné, la démonstration est classique. Elle repose sur les approximations finies du processus. Ces approximations sont obtenues en conditionnant l'état du processus par des configurations extrémales en dehors de l'ensemble $[-n, +n]$ (voir [36]). Il existe une unique mesure stationnaire pour toutes les approximations finies de taille n. De plus, les taux sont de plus proches voisins et par les propositions 3.1.6 du chapitre 3 et 2.3.14 du chapitre 2, les hypothèses d'irréductibilité et de réversibilité impliquent que cette mesure stationnaire est la restriction d'une chaîne de Markov homogène à $[-n, +n]$. La matrice de transition correspondante sur $\{\emptyset, g, d, gd\}$ est

$$P = \begin{pmatrix} p_{\emptyset\,\emptyset} & p_{\emptyset\,g} & p_{\emptyset\,d} & p_{\emptyset\,gd} \\ p_{g\,\emptyset} & p_{g\,g} & p_{g\,d} & p_{g\,gd} \\ p_{d\,\emptyset} & 0 & p_{d\,d} & 0 \\ p_{gd\,\emptyset} & 0 & p_{gd\,d} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

où les quantités $p_{\alpha\beta}$ sont des probabilités de transition positives. La chaîne étant ergodique, le PU l'est également par comparaison stochastique (voir les détails dans [36] et [54]).

Exemple 4.4.1 .

Nous donnons un exemple de taux pour lesquels la proposition 4.4.1 s'applique,

$$\lambda(\emptyset, g) = \lambda(\emptyset, d) = a_1 \quad ; \quad \lambda(g, gd) = \lambda(d, gd) = b_1$$

$$\lambda(gd, g) = \lambda(gd, d) = a_2 \quad ; \quad \lambda(g, \emptyset) = \lambda(d, \emptyset) = b_2$$

$$\lambda(\emptyset, gd) = a_1 b_1 \quad ; \quad \lambda(gd, \emptyset) = a_2 b_2$$

où a_1, b_1, a_2, b_2 sont des réels positifs. Les conditions (4.42) sont satisfaites si

$$a_1 \leq b_1/(1 + b_1) \quad \text{et} \quad a_2 \leq b_2/(1 + b_2)\,.$$

Exemple 4.4.2 .

Lorsque le processus de base est celui de l'exemple 4.1.1 (ressources indépendantes) avec deux ressources, les conditions de monotonie (4.42) sont clairement satisfaites. D'après la proposition 4.4.1, le PU global correspondant est donc ergodique.

Quand des ensembles de plus de deux ressources sont considérés, comme dans l'exemple 4.1.4, la même technique est encore applicable. L'inversion de l'ordre pour les sites impairs conduit à des conditions d'ergodicité pour le PU sur $\mathbb{Z}$. Pour que ces conditions soient satisfaites il faut en particulier que les PR individuels soient monotones pour l'ordre naturel (les transitions entre configurations non comparables sont interdites). Toutefois, la monotonie de chaque PR individuel n'est en général pas suffisante pour avoir celle du PU global. Généralement les conditions locales de monotonie n'impliquent pas les conditions (4.42). D'autres conditions locales sont nécessaires. Donner l'ensemble de ces conditions de manière générale est possible mais laborieux. Il est préférable de traiter chaque cas particulier séparément. Pour l'exemple 4.1.1 avec plus de deux ressources il est facile de vérifier que les conditions de monotonie de la proposition 3.2.3 sont satisfaites. Ainsi le PU sur $\mathbb{Z}$ correspondant est encore ergodique.

Une conséquence utile de l'ergodicité est la possibilité de définir une structure statistique pour l'estimation de certaines quantités à l'équilibre. Considérons un réseau linéaire, constitué d'un grand nombre inconnu d'utilisateurs, auquel nous associons un PU défini comme en (4.41). Nous supposons que l'état d'équilibre d'un petit nombre n d'utilisateurs voisins est observé. Nous voulons, par exemple, estimer la proportion $\pi(g)$ d'utilisateurs qui n'utilisent que leur ressource g. La structure statistique pour nos observations peut être paramétrée par les coefficients de la matrice de transition P définie en (4.43). La quantité $\pi(g)$ est le poids correspondant à la ressource g dans la mesure invariante π de P. Elle s'exprime de manière explicite à l'aide des probabilités de transition $p_{\alpha\,\beta}$. Pour estimer $\pi(g)$, il est naturel de choisir

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} X_u$$

avec $X_u = 1$ quand u utilise g et $X_u = 0$ sinon. La variance de cet estimateur s'exprime encore à l'aide des puissances de la matrice P et de $\pi(g)$

$$\sigma^2(\overline{X}) = \frac{1}{n}\pi(g)\,(1-\pi(g)) + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n^2}\,\pi(g)\,(P^k(g,g)-\pi(g))\,. \tag{4.44}$$

Comme cas particulier nous considérons le PP sur $\mathbb{Z}$. L'utilisateur u peut occuper les ressources g et d ensemble mais pas séparément de sorte que son espace d'états se réduit à $\{\emptyset, gd\}$. La mesure stationnaire du PP est la mesure invariante d'une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $p = (2\lambda + 1 - (4\lambda+1)^{1/2})/2\lambda$ (voir [54]). L'équation (4.44) se réduit alors à

$$\sigma^2(\overline{X}) = \frac{p}{(1+p)^2}\left\{\frac{1}{n} + 2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k p^k \frac{n-k}{n^2}\right\}.$$

4.4.2 Processus de ressources

Nous nous intéressons à présent aux PR. A partir d'un PU donné, une manière naturelle de définir un processus dans $\mathcal{P}(R)$ est de prendre l'union des ensembles de ressources utilisés à chaque instant (*cf.* proposition 4.1.1). Si l'ordre sur les configurations est l'ordre partiel défini par l'inclusion sur chaque coordonnée, l'union de ces coordonnées est une fonction croissante. Si le PU est monotone, le processus défini par l'union de ces coordonnées à chaque instant est aussi monotone. Cependant nous avons vu dans la section précédente que les PU que nous considérons ne peuvent être monotones pour l'ordre naturel. Ainsi, les cas pour lesquels la monotonie du PR aggrégé se déduit de celle du PU sous-jacent sont trop particuliers pour être développés ici. Nous allons plutôt considérer des PR construits par superposition de PR locaux indicés par l'ensemble des utilisateurs. A travers l'exemple d'une bibliothèque, nous avons montré dans la section 4.1 que ces PR pouvaient effectivement servir à modéliser du partage de ressources. Pour ces PR, les résultats de comparaison stochastique développés dans le chapitre 3 s'appliquent. Nous commençons par donner des conditions générales (4.45) puis nous montrons que sous des conditions assez naturelles le processus qui modélise la bibliothèque est monotone. Des propriétés intéressantes peuvent s'en déduire.

Les PR sont donc définis par superposition comme en (4.19) de la section 4.1. Nous considérons des ensembles finis distincts indicés par U, $(R_u)_{u\in U}$. L'ensemble de toutes les ressources est

$$R = \bigcup_{u\in U} R_u \,.$$

Pour tout u dans U, nous considérons un PR local de taux

$$\{c_u(\eta,\zeta)\,,\ \eta,\zeta \in \mathcal{P}(R)\}\,.$$

Pour un tel PR local, seules les transitions affectant des ressources de R_u sont autorisées de sorte que nous notons ses taux $c_u(\eta,\gamma)$ plutôt que $c_u(\eta,\eta^{\gamma}_{R_u})$, pour tout $\eta \in \mathcal{P}(R)$ et $\gamma \in \mathcal{P}(R_u)$. Soit donc deux PR obtenus par superposition, de taux

$$\{c^i_u(\eta,\gamma)\,,\ \eta \in \mathcal{P}(R),\ \gamma \in \mathcal{P}(R_u),\ u \in U\}$$

et de semi-groupes $\{S^i(t)\}$ $(i = 1,2)$. La proposition 3.2.6 du chapitre 3 s'applique. Si pour tout u dans U et tout η,ζ dans $\mathcal{P}(R)$ avec $\eta \subset \zeta$,

$$\begin{array}{lllll} (a) & \gamma \supset \zeta(R_u) \text{ ou } \gamma \not\sim \zeta(R_u) & \Rightarrow & c^1_u(\eta,\gamma) \le c^2_u(\zeta,\gamma) \\ (b) & \gamma \subset \eta(R_u) \text{ ou } \gamma \not\sim \eta(R_u) & \Rightarrow & c^1_u(\eta,\gamma) \ge c^2_u(\zeta,\gamma) \end{array} \tag{4.45}$$

alors $\{S^1(t)\} \ \le_{st}\ \{S^2(t)\}$.

Des conditions de monotonie s'obtiennent facilement en posant $c^1_u = c^2_u$ dans les conditions ci-dessus. Un premier type d'information intuitivement clair mais difficile à atteindre par d'autres techniques découle des conditions (4.45). Il s'agit de la monotonie de la valeur moyenne de toute fonction croissante sur $\mathcal{P}(R)$ par rapport à des taux de type *naissance et de mort*. Considérons un PR monotone de taux $c^1_u(\eta,\gamma)$ et définissons un PR de taux $c^2_u(\eta,\gamma)$ vérifiant

$$c^2_u(\eta,\gamma) = \begin{cases} b_u\ c^1_u(\eta,\gamma) & \text{si } \gamma \supset \eta(R_u) \\ d_u\ c^1_u(\eta,\gamma) & \text{si } \gamma \subset \eta(R_u) \\ c^1_u(\eta,\gamma) & \text{dans tout autre cas,} \end{cases} \tag{4.46}$$

avec $b_u \ge 1$ et $1 \ge d_u > 0$. La proposition suivante est une conséquence immédiate de la proposition 3.2.6. Nous notons $I\!\!E^{\nu}[f(\eta^i_t)]$ l'intégrale

$$\int f d[\nu S^i(t)] \ = \ \int S^i(t) f d\nu \ .$$

Proposition 4.4.2 *Soit $f(\eta)$ une fonction croissante et ν une mesure de probabilité quelconque sur $\mathcal{P}(R)$. Soit $\{\eta^i_t\,,\ t\ge 0\}$ les PR de taux $c^i_u(\eta,\gamma)$ $(i = 1,2)$ vérifiant les équations (4.46). Si les taux $c^1_u(\eta,\gamma)$ vérifient les conditions de monotonie ci-dessus (conditions (4.45) avec $c^1_u = c^2_u$),*

$$I\!\!E^{\nu}[f(\eta^1_t)] \ \ \le\ \ I\!\!E^{\nu}[f(\eta^2_t)] \ .$$

Si nous choisissons une fonction croissante pour évaluer un PR de taux $c_u(\eta, \gamma)$, la valeur moyenne de cette fonction à chaque instant t augmente lorsque les taux de naissance du processus augmentent ou lorsque les taux de mort diminuent.

Un second type d'information concerne la monotonie du PR global par rapport aux conditions initiales. Notons que R est la configuration maximale pour l'inclusion. Soit $\{\eta_t\ ,\ t \geq 0\}$ un PR monotone et $\{S(t)\}$ son semi-groupe. Pour toute mesure de probabilité ν sur X, nous avons

$$\forall t \geq 0, \quad \nu S(t) \leq_{st} \delta_R S(t)\ ,$$

où δ_R est la mesure de Dirac en R. De même, la configuration $\emptyset$ est minimale pour l'inclusion et pour toute mesure de probabilité ν sur X,

$$\forall t \geq 0, \quad \delta_\emptyset S(t) \leq_{st} \nu S(t)\ .$$

La proposition suivante peut ainsi être vue comme une extension du théorème 2.3 p. 135 chap. 3 dans [36].

Proposition 4.4.3 *Soit $f(\eta)$ une fonction croissante. Soit $\{\eta_t,\ t \geq 0\}$ un PR de taux $c_u(\eta, \gamma)$ et ν une mesure de probabilité sur X. Sous les conditions de monotonie obtenues avec (4.45) pour $c_u^1 = c_u^2 = c_u$,*

$$\mathbb{E}^{\delta_\emptyset}[f(\eta_t)] \leq \mathbb{E}^{\nu}[f(\eta_t)] \leq \mathbb{E}^{\delta_R}[f(\eta_t)]\ .$$

Nous examinons à présent plus précisément les modèles de type bibliothèque définis dans la section 4.1. Ces modèles sont des PR construits par superposition de PR locaux dont nous rappelons les taux,

$$\begin{array}{lrcl}
\text{si } \eta(R_u) \subset \gamma, & c_u(\eta, \gamma) & = & \lambda_u(\eta(R_u), \gamma), \\
\text{si } \eta(R_u) \not\subset \gamma, & c_u(\eta, \gamma) & = & p_{\eta, \eta^\gamma_{R_u}}(u)\, \lambda_u(\eta(R_u), \gamma)\ .
\end{array}$$

Pour des taux locaux de ce type, il est possible de donner des conditions sous lesquelles le PR global est monotone. Il est assez naturel de supposer qu'un utilisateur qui retourne un ensemble de livres le fait le plus souvent en empruntant de nouveaux ouvrages plutôt que de repartir les mains vides. De même, un utilisateur qui vient prendre de nouveaux livres en profitera pour rendre des ouvrages empruntés précédemment dont le prêt est dépassé par exemple. Cela revient à dire que le responsable de la bibliothèque observe plus fréquemment des échanges de livres que des retours ou des emprunts purs. Une hypothèse naturelle est donc que pour tout u, pour tout η dans $\mathcal{P}(R)$ et tout γ dans $\mathcal{P}(R_u)$ avec $\gamma \not\sim \eta(R_u)$,

$$c_u(\eta, \gamma) \quad \geq \quad \max\{c_u(\eta \cup \eta^\gamma_{R_u}, \gamma), c_u(\eta \cap \eta^\gamma_{R_u}, \gamma)\}\ . \tag{4.47}$$

En ce qui concerne les retours ou les emprunts purs de livres, il est également naturel de supposer que les retours et les emprunts de petits ensembles d'ouvrages sont plus fréquents que les retours et emprunts de grandes quantités de livres. Ceci est exprimé par les conditions (4.48) ci-dessous. Pour tout u et tout η, ζ dans $\mathcal{P}(R)$ avec $\eta \subset \zeta$,

$$\begin{array}{llrcl}
\text{si } \gamma \supset \zeta(R_u) & \text{alors} & c_u(\eta, \gamma) & \leq & c_u(\zeta, \gamma) \\
\text{si } \gamma \subset \eta(R_u) & \text{alors} & c_u(\eta, \gamma) & \geq & c_u(\zeta, \gamma)\ .
\end{array} \tag{4.48}$$

Nous pouvons encore avoir à comparer des échanges de livres pour lesquels il est impossible de trancher entre l'une ou l'autre des situations ci-dessus. Dans ce cas nous supposons les taux égaux. Ainsi, pour tout u et tout η, ζ dans $\mathcal{P}(R)$ avec $\eta \subset \zeta$,

$$\text{si } \gamma \not\sim \eta(R_u) \text{ et } \gamma \not\sim \zeta(R_u) \text{ alors} \quad c_u(\eta, \gamma) \quad = \quad c_u(\zeta, \gamma)\ . \tag{4.49}$$

Il est alors facile de vérifier que les conditions (4.47), (4.48), (4.49) impliquent (4.45) avec $c_u^1 = c_u^2$, ce qui montre que le PR considéré est un processus monotone. Ceci justifie l'évaluation de l'état de la bibliothèque par le responsable à l'aide d'une fonction *score* $f(\eta)$ monotone pour l'inclusion. Par exemple, le nombre d'ouvrages publiés en 1995 est une fonction croissante de la configuration de la bibliothèque. Des propriétés de monotonie intéressantes peuvent se déduire des propositions 4.4.2 et 4.4.3. En pratique, une estimation de Monte-Carlo de la valeur moyenne $\mathbb{E}^\nu[f(\eta_t)]$ peut être obtenue par simulation numérique à partir de l'une ou l'autre des configurations extrémales $\emptyset$ (aucun livre emprunté) et R (aucun livre en rayon).

Les outils de comparaison stochastique semblent donc mieux adaptés aux PR qu'aux PU. Ces derniers ne sont en général pas monotones pour l'ordre usuel. Il est possible d'envisager d'autres ordres qui donnent lieu à autant de conditions de monotonie. Celui que nous avons considéré dans la partie 4.4.1 est naturel pour les graphes bipartites. Les conditions de monotonie qui en découlent nous ont permi de donner des conditions d'ergodicité, c'est-à-dire d'unicité de la mesure stationnaire et de convergence vers cette mesure. Dans le chapitre suivant nous abordons le problème de la transition de phase. Nous verrons que cela revient dans les cas que nous étudions à s'intéresser à l'existence d'une unique mesure réversible.

Chapitre 5

Transition de phase sur les arbres

Pour des systèmes qui augmentent en taille et complexité, il est important de comprendre comment des interactions locales (par exemple des conflits entre utilisateurs utilisant les mêmes ressources) peuvent avoir des effets globaux (systèmes non équitables où certains utilisateurs sont favorisés par rapport à d'autres). Nous nous proposons de mettre en évidence de tels effets en étudiant des modèles simples sur des graphes construits à partir d'un arbre infini et pour lesquels se produit un phénomène de transition de phase. Nous présentons le cadre théorique de cette étude dans la section 5.1. La démarche est inverse de celle du chapitre 2. Nous nous intéressons à des ensembles de variables aléatoires attachées à des sites et pour lesquelles les dépendances locales entre variables sont connues et données par un système de probabilités conditionnelles. Ceci conduit à introduire la notion de spécifications, qui vont jouer le rôle de ces probabilités conditionnelles. Il s'agit alors de déterminer les champs aléatoires dont les probabilités conditionnelles sont données. S'ils existent, ces champs constituent un ensemble de mesures de Gibbs (au sens large de [26]). Nous rappelons la structure d'un tel ensemble. Nous dirons qu'il y a transition de phase s'il contient plus d'un élément. Nous précisons également la notion de spécifications markoviennes pour lesquelles les mesures de Gibbs sont des champs de Markov. Dans la section 5.2 nous considérons le cas du PP sur des graphes échelles infinis. Des modèles analogues, sur un arbre infini et sur la grille infinie de dimension 2, ont déjà été étudiés par Kelly [32] et Louth [38]. Nous donnons des conditions suffisantes de transition de phase qui généralisent un résultat de Kelly [32]. Une fois le problème posé, la démonstration de ces conditions peut se comprendre indépendamment, à partir des seules notions du chapitre 1. Les résultats de cette section sont ceux que nous avons présentés dans [23]. Dans la section 5.3 nous introduisons le formalisme des chaînes de Markov sur les arbres et des lois de bord (voir [26] ou [57]) avec pour but d'étudier, dans la section 5.4, si les conditions suffisantes précédentes sont aussi nécessaires. Enfin dans la section 5.5 nous examinons le cas de certains PU plus généraux.

5.1 Spécifications et mesures de Gibbs

Dans le chapitre 2, nous nous sommes intéressés à des lois de probabilité conjointes d'une famille de variables aléatoires. A partir de ces lois nous avons pu construire des systèmes de probabilités conditionnelles vérifiant différentes propriétés selon les dépendances entre les variables. Nous avons étudié des formes de dépendance variées à travers des propriétés de Markov sans nous préoccuper de l'existence de lois de probabilité qui vérifient ces propriétés. A l'inverse, dans cette section nous nous donnons une famille de fonctions et nous nous intéressons aux champs aléatoires dont les probabilités conditionnelles ont pour versions ces fonctions. Lorsque ces champs existent, ils constituent une classe de champs aléatoires distincts qui ont tous les mêmes probabilités conditionnelles. Pour que de tels champs existent, la famille de fonctions ne peut être choisie arbitrairement et doit vérifier certaines propriétés. Lorsque ces propriétés sont vérifiées, nous parlons de spécification et les champs aléatoires dont les probabilités conditionnelles ont pour versions ces fonctions sont appelés mesures de Gibbs associées à cette spécification. Les termes mesures de Gibbs sont ici employés dans un sens plus large que dans la section 2.2.6 du chapitre 2 où ils étaient associés à la notion de potentiel. Avant de préciser davantage ces notions (pour lesquelles une référence générale est le chapitre 1 de [26]), nous présentons la problématique en montrant en quoi elle diffère de celle qui consiste à définir un champ aléatoire à partir d'une famille de lois marginales. Cette dernière s'appuie sur le théorème d'extension de Kolmogorov que nous rappelons.

Le théorème d'extension de Kolmogorov est un outil classique pour construire des lois de probabilité sur un produit infini d'espaces de probabilité à partir d'une famille cohérente (définition 5.1.1) de lois marginales. Supposons d'abord qu'il existe une loi ν de probabilité sur $(X, \mathcal{F})$. Pour tout sous-ensemble fini V de S, la loi marginale de ν sur X_V est déterminée de façon unique et est notée ν_V . Les marginales $\{\nu_V\}_{V \in \mathcal{P}_f(S)}$ sont liées entre elles. Si V' est inclus dans V, $\nu_{V'}$ est par définition la marginale de ν sur $X_{V'}$ mais aussi la marginale de ν_V sur $X_{V'}$. Cette propriété est appelée propriété de cohérence.

Définition 5.1.1 *Soit $\rho = \{\rho_V\}_{V \in \mathcal{P}_f(S)}$ une famille de lois de probabilité. La famille ρ est dite cohérente si elle vérifie*

$$\forall V' \subset V\ , \quad \rho_{V'} \text{ est la marginale de } \rho_V \text{ sur } X_{V'} \quad . \tag{5.1}$$

Si maintenant, pour tout V dans $\mathcal{P}_f(S)$ nous nous donnons une loi de probabilité ρ_V sur $(X_V, \mathcal{F}_V)$ deux questions se posent. Quelles relations doit vérifier la famille $\{\rho_V\}_{V \in \mathcal{P}_f(S)}$ pour qu'il existe une loi ν sur $(X, \mathcal{F})$ de marginales $\{\rho_V\}_{V \in \mathcal{P}_f(S)}$, et si une telle loi existe est-elle unique ? D'après ce qui précède s'il existe une loi ν de marginales $\{\rho_V\}_{V \in \mathcal{P}_f(S)}$, la famille $\{\rho_V\}_{V \in \mathcal{P}_f(S)}$ vérifie nécessairement la propriété de cohérence (5.1) . Cette propriété est donc nécessaire à l'existence de ν. Le théorème de Kolmogorov montre qu'elle est aussi suffisante.

Proposition 5.1.1 *Soit $\{\rho_V\}_{V \in \mathcal{P}_f(S)}$ une famille cohérente de lois de probabilité. Il existe une unique loi ν sur $(X, \mathcal{F})$ telle que pour tout V dans $\mathcal{P}_f(S)$ la marginale ν_V soit égale à ρ_V .*

Un champ aléatoire est donc défini de manière unique par ses probabilités marginales sur des ensembles finis. L'intérêt du théorème est de permettre de ramener l'étude d'une mesure sur un espace infini à des mesures sur des ensembles finis. Il existe cependant des modèles où les marginales ne peuvent être précisées. Dans certains d'entre eux, on dispose seulement de connaissances sur les dépendances entre variables qui s'expriment à l'aide de probabilités conditionnelles. Dans le cas des champs de Markov par exemple, la forme des probabilités conditionnelles exprime que ce qui se passe sur un sous-ensemble fini de sites ne dépend des autres sites qu'à travers les sites les plus proches. Il est donc naturel pour une famille de fonctions données de se poser la question de l'existence et l'unicité d'un champ admettant ces fonctions comme lois conditionnelles. Cette approche conduit à introduire la notion de spécification. Il s'agit d'une famille de noyaux de probabilité qui vérifient une propriété encore dite de cohérence.

Définition 5.1.2 *Soit $(Y, \mathcal{Y})$ et $(Z, \mathcal{Z})$ deux espaces de probabilité. Une fonction π de $\mathcal{Z} \times Y$ dans $[0,1]$ est un noyau de probabilité de $(Y, \mathcal{Y})$ dans $(Z, \mathcal{Z})$ (ou simplement de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Z}$) si*

- *$\pi(\,.\, | \, \eta\,)$ est une loi de probabilité sur $(Z, \mathcal{Z})$ pour tout η dans Y .*
- *$\pi(K \,|\, .\,)$ est $\mathcal{Y}$-mesurable pour tout K dans $\mathcal{Z}$.*

Il est possible de composer deux noyaux de probabilité. Soit $(T, \mathcal{T})$ un troisième espace de probabilité.

Définition 5.1.3 *Soit π_1 et π_2 des noyaux de probabilité respectivement de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Z}$ et de $\mathcal{Z}$ dans $\mathcal{T}$. La composition $\pi_1\pi_2$ est un noyau de probabilité de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{T}$ défini par*

$$\forall K \in \mathcal{T} \ , \ \forall \eta \in Y \ , \quad \pi_1\pi_2(K|\eta) \ = \ \int \pi_2(K|\xi)\pi_1(d\xi|\eta) \quad .$$

Il est également possible de composer une mesure et un noyau de probabilité.

Définition 5.1.4 *Soit ν une mesure de probabilité sur $(Y, \mathcal{Y})$ et π un noyau de probabilité de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Z}$. La mesure de probabilité $\nu\pi$ sur $(Z, \mathcal{Z})$ est définie par*

$$\forall K \in \mathcal{Z} \ , \quad \nu\pi(K) \ = \ \int \pi(K \mid \xi) \, \nu(d\xi) \ .$$

Nous nous fixons donc une famille $\rho = \{\rho_V\}_{V \in \mathcal{P}_f(S)}$ de noyaux de probabilité respectivement de $(X, \mathcal{F}_{S\setminus V})$ dans $(X, \mathcal{F})$. Le problème est de déterminer les champs aléatoires ν sur $(X, \mathcal{F})$ qui vérifient

$$\forall K \in \mathcal{F} \ , \ \forall V \in \mathcal{P}_f(S), \quad \nu(K \mid \mathcal{F}_{S\setminus V}) \ = \ \rho_V(\,K \mid .\,) \quad \nu - p.s. \tag{5.2}$$

Pour qu'un tel champ ait une chance d'exister, la famille $\rho = \{\rho_V\}_{V \in \mathcal{P}_f(S)}$ doit vérifier certaines conditions. En effet, s'il existe un champ ν dont les probabilités conditionnelles sont données par ρ, des propriétés connues des probabilités conditionnelles nous permettent de déduire des relations nécessairement vérifiées par les fonctions $\{\rho_V\}_{V \in \mathcal{P}_f(S)}$,

$$\begin{aligned} \forall V, W \in \mathcal{P}_f(S) \text{ avec } V \subset W \quad &, \quad \forall K \in \mathcal{F} \ , \ \forall L \in \mathcal{F}_{S\setminus V} \ , \\ \rho_V(K \cap L \mid .\,) \ &= \ \nu(K \cap L \mid \mathcal{F}_{S\setminus V}) \qquad \nu - p.s. \\ &= \ \mathbb{1}_L . \nu(K \mid \mathcal{F}_{S\setminus V}) \ = \ \mathbb{1}_L . \rho_V(K \mid .\,) \quad \nu - p.s. \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}\rho_W\rho_V(K \mid .\,) &= \nu(\nu(K \mid \mathcal{F}_{S\setminus V}) \mid \mathcal{F}_{S\setminus W}) \quad \nu-p.s.\\ &= \nu(K \mid \mathcal{F}_{S\setminus W}) \quad = \quad \rho_W(K \mid .\,) \quad \nu-p.s.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Les relations ci-dessus vérifiées par les $\{\rho_V\}_{V\in\mathcal{P}_f(S)}$ sont vraies ν-p.s. Or nous souhaitons fixer ces fonctions a priori sans rien connaître des supports des mesures de probabilité susceptibles de vérifier (5.2) . Il nous faut donc imposer aux fonctions $\{\rho_V\}_{V\in\mathcal{P}_f(S)}$ de vérifier les égalités (5.3) et (5.4) partout plutôt que simplement ν-presque partout. Ainsi, une spécification est définie de la manière suivante.

Définition 5.1.5 *Une spécification est une famille $\rho = \{\rho_V\}_{V\in\mathcal{P}_f(S)}$ de noyaux de probabilité respectivement de $(X, \mathcal{F}_{S\setminus V})$ dans $(X, \mathcal{F})$ vérifiant*

$$\begin{aligned}\forall V, W \in \mathcal{P}_f(S) \text{ avec } V \subset W \quad , \quad \forall K \in \mathcal{F}\ ,\ \forall L \in \mathcal{F}_{S\setminus V}\ ,&\\ \rho_V(K \cap L \mid .\,) = \mathbb{1}_L.\rho_V(K \mid .\,) \quad ,& \qquad (5.5)\\ \rho_W\rho_V(K \mid .\,) = \rho_W(K \mid .\,) \quad .& \qquad (5.6)\end{aligned}$$

Lorsqu'un noyau vérifie la condition (5.5), il est dit propre. Pour la relation (5.6), on parle de condition de cohérence.

Définition 5.1.6 *Soit ρ une spécification. Les champs aléatoires qui vérifient (5.2) sont appelés mesures de Gibbs associées à ρ. Leur ensemble est noté $\mathcal{G}(\rho)$.*

Dans la partie 2 nous avons déjà parlé de mesures de Gibbs de plus proches voisins (définition 2.2.8). Il s'agissait de champs aléatoires dont les probabilités conditionnelles avaient une forme particulière donnée par un potentiel de plus proches voisins. Lorsqu'une spécification est donnée par un potentiel, on parle de spécification de Gibbs (voir par exemple [26] chap. 2 pour une définition précise). Les termes mesures de Gibbs sont généralement réservés aux champs aléatoires associés à une spécification de Gibbs. Nous l'employons ici de manière plus générale.

L'ensemble $\mathcal{G}(\rho)$ peut être vide (voir l'exemple 30 p. 26 dans [43]). Toutefois, dans les modèles que nous considèrerons par la suite, $\mathcal{G}(\rho)$ sera toujours non vide. Des conditions suffisantes sont données dans le chapitre 4 de [26] . Lorsque S est infini, $\mathcal{G}(\rho)$ peut contenir plusieurs champs aléatoires distincts. Si cela se produit, nous dirons qu'il y a transition de phase. Pour étudier un tel phénomène il peut être intéressant de préciser la structure de l'ensemble $\mathcal{G}(\rho)$. Une référence sur ce thème est le chapitre 7 de [26] .

Proposition 5.1.2 *$\mathcal{G}(\rho)$ est un ensemble convexe, i.e.*

$$\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{G}(\rho) \quad \Rightarrow \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2 \in \mathcal{G}(\rho)\ .$$

Il suffit de remarquer que $\nu \in \mathcal{G}(\rho)$ est équivalent à $\nu\rho_V = \nu$ pour tout V dans $\mathcal{P}_f(S)$, qui est simplement une autre façon d'écrire (5.2) (remarque 1.24, chap. 1 p. 17 de [26]). La proposition s'en déduit facilement. L'ensemble $\mathcal{G}(\rho)$ sera donc caractérisé par ses éléments extrémaux définis comme suit.

Définition 5.1.7 *Soit ν dans $\mathcal{G}(\rho)$. La mesure ν est extrémale dans $\mathcal{G}(\rho)$ si*

$$\exists \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{G}(\rho) \text{ et } \alpha \in [0,1] \ , \ \nu = \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } 1 \ .$$

Nous noterons $ex\mathcal{G}(\rho)$ l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathcal{G}(\rho)$.

Sous de faibles hypothèses, il est possible de montrer (voir chapitre 7 de [26]) que $\mathcal{G}(\rho)$ est un simplexe : tout élément de $\mathcal{G}(\rho)$ s'écrit de manière unique comme combinaison convexe d'éléments extrémaux. Dans la suite, nous nous plaçons toujours dans ce cas. Il se produit par exemple lorsque l'ensemble d'états B est fini (voir [43] p. 32). Ce résultat nous sera utile dans la section 5.3, pour caractériser les cas où il n'y a pas transition de phase. Nous commencerons par examiner les éléments extrémaux, qui ont en général des propriétés supplémentaires et sont plus faciles à étudier.

Dans ce qui suit nous nous limitons à des spécifications de Markov au sens de la définition 12.1, chap. 12 p. 239 de [26] que nous rappelons.

Définition 5.1.8 *La famille de noyaux de probabilité $\rho = \{\rho_V\}_{V \in \mathcal{P}_f(S)}$ est une spécification de Markov si ρ est une spécification telle que*

$$\forall V \in \mathcal{P}_f(S) \ , \ \forall K \in \mathcal{F}_V \ , \quad \rho_V(K \mid . \ ) \text{ est } \mathcal{F}_{N(V)} - \text{mesurable.}$$

Les champs aléatoires associés à une spécification de Markov vérifient la propriété de Markov locale (définition 2.1.8, chapitre 2) et sont des champs de Markov. En particulier, les mesures réversibles du PP sont les mesures de Gibbs associées à une spécification que nous précisons ci-dessous.

5.2 Conditions suffisantes de transition de phase pour le PP sur des arbres échelles

Soit A_m^d l'arbre régulier de degré d, de hauteur m défini dans la section 1.5 du chapitre 1. Soit A^d l'arbre infini obtenu à partir de A_m^d lorsque m tend vers l'infini. Nous considérons le PP sur les graphes échelles $K_n \times A^d$ où K_n est la clique à n sommets. Ces graphes ne sont pas des arbres mais il suffit de changer l'espace d'états de chaque sommet pour se ramener au cas de A^d . En effet, le PP sur $K_n \times A^d$ peut être vu comme un processus sur A^d où chaque sommet a pour espace d'états $\mathcal{A}_{K_n}$. L'ensemble $\mathcal{A}_{K_n}$ des configurations admissibles sur K_n contient $n+1$ éléments, l'état où tous les sommets sont à 0 et les n états avec exactement un sommet à 1 . Les mesures réversibles sur $K_n \times A^d$ peuvent être vues comme des champs de Markov sur A^d. Elles correspondent à l'ensemble $\mathcal{G}(\rho)$ des mesures de Gibbs pour la spécification de Markov ρ suivante. Rappelons que $\overline{V} = V \cup N(V)$ et $\mathcal{A}_{\overline{V}}$ est l'ensemble des configurations admissibles pour le PP sur $\overline{V}$.

$$\forall V \in \mathcal{P}_f(S), \ \forall \gamma \in X_V, \quad \rho_V(\eta(V) = \gamma \mid \eta(S \backslash V)) \ = \ \begin{cases} Z_V^{-1} \lambda^{\sum_{x \in V} \gamma(x)} & \text{si } \eta_V^\gamma(\overline{V}) \in \mathcal{A}_{\overline{V}} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etudier la transition de phase pour ce modèle revient donc à étudier la non unicité de la mesure réversible. La condition suffisante de transition de phase que nous donnons consiste en une valeur $\overline{\lambda}$ du taux λ au-dessus de laquelle il y a non unicité de la mesure réversible. Pour cela nous n'avons besoin que des notions introduites dans la section 1.5 du chapitre 1. Notons simplement A_m (resp. A) le graphe $K_n \times A_m^d$ (resp. $K_n \times A^d$) et Z_{A_m} la fonction de partition du PP sur A_m. Dans le chapitre 1 nous avons montré (proposition 1.5.2) que pour $m \geq 1$,

$$Z_{A_m} \quad = \quad (Z_{A_{m-1}})^d + \frac{\lambda}{n^{d-1}} \left[\, (Z_{A_{m-2}})^d + (n-1) Z_{A_{m-1}} \, \right]^d \quad , \tag{5.7}$$

avec

$$\begin{array}{rclcl} Z_{A_0} & = & Z_{K_n} & = & 1 + n\lambda \\ Z_{A_{-1}} & = & Z_{\emptyset} & = & 1 \quad . \end{array}$$

Pour le PP sur A une condition suffisante de transition de phase est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 5.2.1 *Pour $d \geq n \geq 2$ et $\lambda > \overline{\lambda}$, avec*

$$\overline{\lambda} \quad = \quad (d+1)^d / (d^d \, (d-n+1)) \quad , \tag{5.8}$$

le PP sur A a plus d'une mesure réversible.

Démonstration. L'idée générale pour étudier les mesures réversibles du PP sur A est la même que pour les modèles de Ising stochastiques sur un ensemble infini de sites (*cf.* Liggett [36] théorème 1.16 p. 184). Pour m fixé, il s'agit d'imposer des conditions de bord aux feuilles de A_m. Chaque condition de bord possible correspond à une mesure sur A qui est la mesure réversible du PP sur A_m conditionnée à cette condition. Soit $\mathcal{R}_m$ l'enveloppe convexe de ces mesures sur A_m et $\mathcal{G}(\rho)$ l'ensemble des mesures réversibles pour le PP sur A. Nous avons

$$\mathcal{G}(\rho) \quad = \quad \bigcap_m \mathcal{R}_m \quad .$$

Si $\mathcal{G}(\rho)$ se réduit à une unique mesure ν_A alors toute suite $(\nu_m)_m$ de mesures réversibles sur A_m converge vers ν_A, quelles que soient les conditions de bord. Pour mettre en évidence une transition de phase, il suffit de trouver des conditions de bord pour lesquelles la suite $(\nu_m)_m$ ne converge pas. Pour montrer que $(\nu_m)_m$ ne converge pas, il suffit de regarder les probabilités des configurations à la racine O de l'arbre. Comme dans le chapitre 1, nous notons η_m^o la restriction d'une configuration η à la clique qui correspond à la racine O dans A_m. La condition de bord la plus naturelle est celle où les feuilles de A_m sont fixées à la configuration vide. La mesure qui en découle est la mesure réversible du PP sur A_{m-1}. Ainsi, il y a transition de phase dès que la quantité $\nu_m(\eta_m^o = 0_g)$ n'a pas de limite quand m tend vers l'infini. Nous commençons donc par étudier la quantité a_m définie par

$$a_m \quad = \quad \nu_m(\eta_m^o = 0_g) \quad = \quad \frac{(Z_{A_{m-1}})^d}{Z_{A_m}} \quad .$$

Cette dernière égalité vient par exemple de l'équation (4.13), section 4.1 chapitre 4. Nous déduisons de la relation (5.7)

$$a_m = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{n^{d-1}}\left[a_{m-1}+(n-1)\right]^d} \quad . \tag{5.9}$$

Pour $n=1$, (5.9) donne l'équation (2.9) p. 383 de Kelly [32]. La suite définie par (5.9) a un unique point fixe dans $]0,1[$. Il y a transition de phase si ce point fixe n'est pas stable. Ceci se produit pour des valeurs de λ supérieures à une valeur critique. Pour $n=1$ nous retrouvons le résultat de Kelly. Pour $n \geq 2$, fixer la condition de bord à l'état vide ne conduit pas à une condition satisfaisante. Une meilleure condition est obtenue à partir d'une condition de bord non symétrique que nous précisons. L'arbre échelle A peut être vu comme n copies connectées de A^d. Nous distinguons une de ces copies et nous indiçons ses sommets par x de sorte que dans chaque clique K_n de A, un des philosophes est indicé par x. Dans A, l'ensemble des philosophes indicés par x sont connectés selon la copie distinguée de A^d. La condition de bord que nous choisissons consiste alors à fixer les feuilles de A_m à la configuration de $\mathcal{A}_{K_n}$ dans laquelle le philosophe x est à 1. Le problème est ensuite de savoir si ces conditions affectent ou non la probabilité que le philosophe x de la racine soit à 1. Les probabilités des configurations possibles à la racine sont déterminées par trois quantités. Nous notons α_m la probabilité de la configuration vide. Elle est a priori distincte de la valeur a_m précédente. Nous notons β_m la probabilité que le philosophe x soit à 1 et γ_m la probabilité qu'un philosophe autre que x soit à 1. De manière analogue à (5.9) nous obtenons les équations suivantes,

$$\alpha_m + \beta_m + (n-1)\gamma_m = 1 \tag{5.10}$$

$$\beta_m = \lambda\, \alpha_m\, (1-\beta_{m-1})^d \tag{5.11}$$

$$\gamma_m = \lambda\, \alpha_m\, (1-\gamma_{m-1})^d \quad . \tag{5.12}$$

Les équations (5.11) et (5.12) peuvent se réécrire sous la forme d'un système dynamique discret de dimension 2,

$$\begin{aligned} \beta_m &= \lambda\,(1-\beta_{m-1})^d \,/ (1+\lambda(1-\beta_{m-1})^d + (n-1)\lambda(1-\gamma_{m-1})^d) \\ \gamma_m &= \lambda\,(1-\gamma_{m-1})^d \,/ (1+\lambda(1-\beta_{m-1})^d + (n-1)\lambda(1-\gamma_{m-1})^d) \quad . \end{aligned} \tag{5.13}$$

S'il n'y a qu'une seule mesure réversible, les limites pour β_m et γ_m existent et sont égales. Une condition suffisante de transition de phase peut donc être obtenue en étudiant la stabilité du point fixe noté (β,β) pour ce système. Nous nous intéressons pour cela aux valeurs propres de la matrice jacobienne du système (5.13). Au point (β,β), la matrice jacobienne est

$$\frac{-d\beta^2}{\lambda(1-\beta)^{d+1}} \mathbb{I}_2 + \frac{d\beta^2}{(1-\beta)} \begin{pmatrix} -(n-1) & (n-1) \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ,$$

où $\mathbb{I}_2$ est la matrice identité de dimension 2. Ses valeurs propres sont

$$\frac{-d\beta^2}{\lambda(1-\beta)^{d+1}} \quad \text{et} \quad \frac{-(d\beta^2 + n\lambda d\beta^2(1-\beta)^d)}{\lambda(1-\beta)^{d+1}} .$$

La plus grande en module est

$$\frac{(d\beta^2 + n\lambda d\beta^2(1-\beta)^d)}{\lambda(1-\beta)^{d+1}} \,,$$

qui se simplifie ((β,β) est point fixe) en

$$\frac{d\beta}{(1-\beta)} \,. \tag{5.14}$$

Nous appliquons alors le théorème 7.1 p. 369 de Sandefur [46] selon lequel si (5.14) est supérieur à 1, *i.e.* $\beta > \frac{1}{d+1}$ alors le point fixe n'est pas stable. D'autre part en utilisant (5.10) et (5.11) nous avons

$$\lambda \;=\; \frac{\beta}{(1-n\beta)(1-\beta)^d} \,,$$

et pour $d \geq n \geq 2$, $\beta > \frac{1}{d+1}$ est équivalent à $\lambda > \overline{\lambda}$ avec $\overline{\lambda}$ donné par (5.8). Sous cette dernière condition le PP a donc plus d'une mesure réversible.

■

Pour $n = 1$, le système (5.13) se simplifie et la condition de stabilité du point fixe permet de retrouver la valeur critique donnée dans [32].

Dans les sections suivantes, notre objectif est d'étudier la réciproque de la proposition 5.2.1. Plus généralement, il s'agit de trouver des conditions sous lesquelles il n'y a pas transition de phase, c'est-à-dire unicité de la mesure de Gibbs. Pour cela nous introduisons la notion de lois de bord pour les chaînes de Markov sur les arbres (*cf* [26] ou [57]). En vue d'appliquer ce formalisme au PP, nous présentons également des outils développés dans [58]. Dans cette référence, Zachary définit une notion de spécification répulsive qui étend la définition usuelle pour les systèmes de spins ($B = \{0,1\}$) aux espaces d'états B totalement ordonnés et possédant un plus petit élément. Il montre alors que lorsque une spécification est répulsive, une condition nécessaire et suffisante de transition de phase est l'égalité de deux chaînes de Markov alternées particulières (voir définition 5.3.4 ci-dessous). Cette technique ne peut être appliquée directement au PP sur $K_n \times T^r$ sans quelques modifications. Nous présentons donc les notions de [58] étendues au cas B partiellement ordonné. Pour $n \leq 2$, le PP sur $K_n \times T^r$ peut être vu comme un processus répulsif sur T^r et nous en déduisons une condition nécessaire et suffisante de transition de phase. Pour $n \geq 3$, il n'existe pas d'ordre sur B, même partiel, pour lequel les outils présentés soient applicables. Le PP ne peut être vu comme un processus répulsif sur T^r. Il est toutefois possible de donner une condition suffisante de transition de phase. Dans les deux cas, ces conditions s'explicitent en fonction du taux λ (propositions 5.4.3 à 5.4.5). Pour $n \neq 1$, nous n'en donnons pas une démonstration complète. Nous précisons les arguments que nous avions envisagés pour les propositions 5.4.4 et 5.4.5 en indiquant les points qu'il resterait à résoudre.

5.3 Chaînes de Markov sur les arbres et lois de bord

Soit ρ une spécification de Markov sur un arbre et $\mathcal{G}(\rho)$ l'ensemble des mesures de Gibbs associées. Les éléments de $\mathcal{G}(\rho)$ sont des champs de Markov. Dans le chapitre 2 (définition

2.2.4 section 2.2.3) nous avons vu qu'il était possible de définir sur un arbre comme sur $\mathbb{Z}$ la notion de chaîne de Markov. Nous avons vu que cette notion était plus forte que la propriété de Markov locale dans le sens où toute chaîne de Markov vérifie la propriété de Markov locale mais l'inverse n'est pas forcément vrai. Néanmoins, le résultat qui suit (théorème 12.6 chap. 12 p.241 dans [26]) montre que certains champs de Markov de $\mathcal{G}(\rho)$ sont aussi des chaînes de Markov.

Proposition 5.3.1 *Soit ρ une spécification de Markov sur un arbre. Si ν est une mesure extrémale de $\mathcal{G}(\rho)$ alors ν est une chaîne de Markov.*

L'inclusion peut être stricte. Il existe des chaînes de Markov dans $\mathcal{G}(\rho)$ non extrémales. La proposition 5.3.1 peut être utile dans la recherche de conditions sous lesquelles il n'y a pas transition de phase. Pour montrer que $\mathcal{G}(\rho)$ ne contient qu'un seul élément il suffit de montrer qu'il n'y a qu'une seule mesure dans $ex\mathcal{G}(\rho)$. Dans ce but, il est pratique de pouvoir caractériser les chaînes de Markov de $\mathcal{G}(\rho)$. Dans ce qui suit nous nous limitons à des spécifications de Markov ρ pour lesquelles les champs de Markov de $\mathcal{G}(\rho)$ vérifient la condition "w_o". Cette condition (définition 2.2.9) est en particulier vraie pour toute spécification de Markov positive. Dans ce cas, les champs de Markov sur un arbre $A=(S,E)$ sont aussi des systèmes de cliques avec fonction d'interaction $Q=\{Q_{\{x,y\}}\}_{\{x,y\}\in E}$ (proposition 2.3.12, section 2.3.4, chapitre 2). Si ν appartient à $\mathcal{G}(\rho)$, nous avons

$$\begin{aligned}&\forall V\in\mathcal{P}_f(S)\ ,\ \forall\zeta\in X_V\ ,\\ &\qquad \nu(\eta(V)=\zeta\mid\mathcal{F}_{S\setminus V}) \;=\; Q_0(\eta(N(V)))\,\mu_{Q,V}(\eta(N(V)),\zeta)\quad \nu-p.s.\quad ,\end{aligned}$$

avec $\forall\xi\in X$

$$\mu_{Q,V}(\xi^{N(V)},\xi^V) \;=\; \prod_{\{x,y\}\cap V\neq\emptyset} Q_{\{x,y\}}(\xi^{\{x,y\}})\quad ,$$

où ξ^V est la restriction de ξ à V. Si ρ est une spécification de Gibbs pour un potentiel de plus proches voisins ϕ (c'est-à-dire une spécification de Markov positive), les éléments de $\mathcal{G}(\rho)$ sont des mesures de Gibbs de plus proches voisins au sens de la définition 2.2.8 du chapitre 2 et nous pouvons poser par exemple

$$\forall\{x,y\}\in E\ ,\ \forall\zeta\in X_{\{x,y\}}\ ,\quad Q_{\{x,y\}}(\zeta) \;=\; \exp\left(\phi_{\{x,y\}}(\zeta)+\frac{\phi_{\{x\}}(\zeta(x))}{|N(x)|}+\frac{\phi_{\{y\}}(\zeta(y))}{|N(y)|}\right)\quad .$$

Les fonctions obtenues ci-dessus sont strictement positives. Il est possible de définir de la même manière des fonctions $Q_{\{x,y\}}$ pour les mesures réversibles du processus des philosophes sur un arbre. Nous verrons dans la partie suivante que ces fonctions $Q_{\{x,y\}}$ ne sont pas strictement positives. La fonction $Q_{\{x,y\}}$ peut être vue comme une matrice de transfert pour l'arête $\{x,y\}$. Plus précisément, nous appelons matrice de transfert la notion étendue aux arêtes orientées. Rappelons que xy représente l'arête orientée de x à y et $\vec{L}$ l'ensemble des arêtes orientées. Nous définissons la famille $Q=\{Q_{xy}\}_{xy\in\vec{L}}$ de matrices sur B ,

$$\forall\eta\in X\ ,\quad Q_{xy}(\eta(x),\eta(y)) \;=\; Q_{yx}(\eta(y),\eta(x)) \;=\; Q_{\{x,y\}}(\eta^{\{x,y\}})\quad .$$

Ces matrices ne sont pas forcément stochastiques mais sont une généralisation des matrices de transition pour les chaînes de Markov. Il est possible de leur associer des lois de bord comme suit ([26], définition 12.10 chap.12 p.242).

Définition 5.3.1 *Une famille de vecteurs lignes* $l = \{l_{xy}\}_{xy\in\vec{L}}$ *avec* $l_{xy} \in]0,\infty[^B$*, est une loi de bord pour* $Q = \{Q_{xy}\}_{xy\in\vec{L}}$ *si pour tout* xy *dans* $\vec{L}$ *il existe une constante positive* c_{xy} *telle que*

$$\forall \delta \in B\ , \quad l_{xy}(\delta) \ = \ c_{xy} \prod_{z\in N(x)\setminus\{y\}} l_{zx}Q_{zx}(\delta) \quad . \tag{5.15}$$

Si l est une loi de bord, toute famille de vecteurs lignes obtenus en multipliant les éléments de l par des constantes positives est encore une loi de bord que nous identifierons à l.
La notion de loi de bord permet de caractériser les chaînes de Markov contenues dans $\mathcal{G}(\rho)$. Le théorème 12.12 chap.12 p.243 de [26] montre que les chaînes de Markov de $\mathcal{G}(\rho)$ sont en bijection avec les lois de bord normalisées. Nous donnons ce théorème puis nous précisons ce que nous entendons par loi de bord normalisée. Nous notons $\mathcal{P}_f^\star(S)$ l'ensemble des sous-ensembles finis connexes de S. Pour V dans $\mathcal{P}_f^\star(S)$ et z dans $N(V)$, nous notons z_V l'unique élément de $V \cap N(z)$.

Proposition 5.3.2 *Soit* ρ *une spécification de Markov à laquelle on peut associer une famille de matrices de transfert* $Q = \{Q_{xy}\}_{xy\in\vec{L}}$*.*

Pour toute loi de bord $l = \{l_{xy}\}_{xy\in\vec{L}}$ *pour* Q*, l'équation ci-dessous définit de manière unique une chaîne de Markov de* $\mathcal{G}(\rho)$*,*

$$\forall V \in \mathcal{P}_f^\star(S)\ ,\ \forall \eta \in X\ , \quad \nu(\eta^{\overline{V}}) \ = \ Z_V^{-1} \prod_{z\in N(V)} l_{zz_V}(\eta^z)\ \mu_{Q,V}(\eta^{N(V)}, \eta^V) \tag{5.16}$$

où Z_V *est une constante de normalisation positive indépendante de* $\eta^{\overline{V}}$*.*

Inversement, toute chaîne de Markov ν *de* $\mathcal{G}(\rho)$ *admet une représentation du type (5.16). La loi de bord* $l = \{l_{xy}\}_{xy\in\vec{L}}$ *correspondante est unique au sens où si* l' *est une autre loi de bord vérifiant (5.16) alors pour tout* xy *dans* $\vec{L}$*,* l'_{xy} *est un multiple positif de* l_{xy}*.*

Dans la proposition ci-dessus les lois de bord ne sont déterminées qu'à un facteur multiplicatif près. En fixant un état de référence γ de B, nous pouvons définir des lois de bord normalisées.

Définition 5.3.2 *Soit* γ *un élément de* B*. Une famille de vecteurs lignes* $l = \{l_{xy}\}_{xy\in\vec{L}}$ *avec* $l_{xy} \in]0,\infty[^B$*, est une loi de bord normalisée en* γ *si* l *est une loi de bord telle que pour tout* xy *dans* $\vec{L}$*,* $l_{xy}(\gamma) = 1$*. Ce qui revient à dire*

$$\forall xy \in \vec{L}\ ,\ \forall \delta \in B\ , \quad l_{xy}(\delta) \ = \prod_{z\in N(x)\setminus\{y\}} \frac{l_{zx}Q_{zx}(\delta)}{l_{zx}Q_{zx}(\gamma)} \quad . \tag{5.17}$$

Pour le processus des philosophes l'état de référence naturel sera $\gamma = 0_g$ et plus généralement l'état vide pour les PU. Nous noterons Ψ_B l'ensemble des vecteurs lignes de $]0,\infty[^B$ dont la composante qui correspond à γ vaut 1. L'espace d'états B est supposé muni d'un ordre partiel $\leq$ pour lequel il existe un plus petit élément noté χ tel que pour tout $\delta \in B$, $\chi \leq \delta$. L'état χ n'est pas nécessairement égal à l'état de référence γ comme c'est le cas dans [58]. Il est toutefois important de supposé γ comparable à tous les éléments de B. Pour $\delta \in B$, nous notons $\mathbb{1}_\delta$ l'élément de $]0,\infty[^B$ défini par $\mathbb{1}_\delta(\delta) = 1$ et $\mathbb{1}_\delta(\delta') = 0$ si $\delta' \neq \delta$. En particulier,

$\mathbf{1}_\gamma \in \Psi_B$. L'ordre $\leq$ induit une relation $\prec$ sur $]0,\infty[^B$ privé du vecteur nul. Elle est définie par

$$\mathcal{L}_1 \prec \mathcal{L}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \delta_1 \leq \delta_2 \quad \mathcal{L}_1(\delta_2)\mathcal{L}_2(\delta_1) \leq \mathcal{L}_1(\delta_1)\mathcal{L}_2(\delta_2)\,. \tag{5.18}$$

Si nous identifions les lois de bord égales à un facteur multiplicatif strictement positif près, cette relation est un ordre partiel. La propriété d'antisymétrie se déduit facilement du fait que γ est comparable à tout élément de B. Notons que pour des réels positifs a et b, $\mathcal{L}_1 \prec \mathcal{L}_2$ implique $a\mathcal{L}_1 \prec b\mathcal{L}_2$.

Nous allons examiner des cas où l'équation (5.17) se simplifie. Les arbres que nous considérons sont des arbres de Cayley. Ce ne sont pas tout à fait les arbres considérés dans la section 5.2. Un arbre de Cayley T^r d'ordre r est un arbre infini où tous les sommets sont de degré r. Il correspond à l'arbre A^{r-1} de la section 5.2 auquel une branche infinie est rajoutée à partir de la racine. Les arbres de Cayley sont dans cette section plus faciles à manipuler et pour les questions de transition de phase il est équivalent de travailler avec T^r ou A^{r-1}. Nous considérons d'autre part des spécifications de Markov ρ homogènes, pour lesquelles il existe une matrice $\mathcal{Q}$ nécessairement symétrique telle que

$$\forall xy \in \vec{L}\,, \quad Q_{xy} \;=\; \mathcal{Q} \quad .$$

Soit ν une chaîne de Markov pour une telle spécification. La mesure ν est homogène, c'est-à-dire invariante par isomorphisme de graphes, si et seulement si l'unique loi de bord normalisée en γ de l'équation (5.17), vérifie

$$\forall xy \in \vec{L}\,, \quad l_{xy} \;=\; \mathcal{L}$$

avec $\mathcal{L} \in \ \Psi_B$.

L'équation de définition (5.17) implique donc que $\mathcal{L}$ est solution de l'équation

$$\forall \delta \in B\,, \quad \mathcal{L}(\delta) \;=\; \left(\frac{\mathcal{L}\mathcal{Q}(\delta)}{\mathcal{L}\mathcal{Q}(\gamma)}\right)^d \quad . \tag{5.19}$$

Nous avons posé $d = r-1$ et nous notons $\mathbb{F}(\mathcal{L})$ le vecteur ligne défini par

$$\forall \delta \in B\,, \quad \mathbb{F}(\mathcal{L})(\delta) \;=\; \left(\frac{\mathcal{L}\mathcal{Q}(\delta)}{\mathcal{L}\mathcal{Q}(\gamma)}\right)^d \quad . \tag{5.20}$$

La caractérisation des chaînes de Markov homogènes de $\mathcal{G}(\rho)$ est donc donnée par la proposition suivante (corollaire 12.17 chap.12 p.247 [26]).

Proposition 5.3.3 *Soit ρ une spécification de Markov homogène sur l'arbre de Cayley T^r, de matrice de transfert $\mathcal{Q}$. A chaque solution $\mathcal{L} \in \ \Psi_B$ de l'équation $\mathcal{L} = \mathbb{F}(\mathcal{L})$ correspond une et une seule chaîne de Markov homogène de $\mathcal{G}(\rho)$.*

Nous allons plus précisément envisager le cas des spécifications répulsives définies ci-dessous. Pour δ'_1 et δ'_2 dans B, la notation $\delta'_1 \not\sim \delta'_2$ signifie que les éléments ne sont pas comparables pour l'ordre partiel $\leq$ sur B.

Définition 5.3.3 *Une spécification de Markov homogène de matrice de transfert $\mathcal{Q}$ est dite répulsive si $\mathcal{Q}$ vérifie*

$$\forall \delta_1 \leq \delta_2,\ \forall \delta'_1 \leq \delta'_2, \quad \mathcal{Q}(\delta'_1,\delta_1)\mathcal{Q}(\delta'_2,\delta_2) \ \leq \ \mathcal{Q}(\delta'_2,\delta_1)\mathcal{Q}(\delta'_1,\delta_2)\ , \tag{5.21}$$

$$\forall \delta_1 \leq \delta_2,\ \forall \delta'_1 \not\sim \delta'_2, \quad \mathcal{Q}(\delta'_1,\delta_1)\mathcal{Q}(\delta'_2,\delta_2) \ = \ \mathcal{Q}(\delta'_2,\delta_1)\mathcal{Q}(\delta'_1,\delta_2)\ . \tag{5.22}$$

Pour une telle spécification, le résultat suivant, donné dans [58] (lemme 3.1 p.251 et remarque p. 253), reste vrai lorsque B n'est que partiellement ordonné.

Proposition 5.3.4 *Soit une spécification de Markov homogène répulsive de matrice de transfert $\mathcal{Q}$. Pour tout élément $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ de $\Psi_B \cup \{\mathbb{1}_\chi\}$ vérifiant $\mathcal{L}_1 \prec \mathcal{L}_2$, nous avons*

$$\begin{array}{lccc} (i) & \mathcal{L}_1\mathcal{Q} & \succ & \mathcal{L}_2\mathcal{Q} \\ (ii) & \mathbb{F}(\mathcal{L}_1) & \succ & \mathbb{F}(\mathcal{L}_2)\ . \end{array}$$

Démonstration. La démonstration se calque sur celle de [58]. Considérons $\delta_1 \leq \delta_2$. La quantité $\mathcal{L}_1\mathcal{Q}(\delta_1)\mathcal{L}_2\mathcal{Q}(\delta_2) - \mathcal{L}_1\mathcal{Q}(\delta_2)\mathcal{L}_2\mathcal{Q}(\delta_1)$ est égale à

$$\sum_{\delta'_1 \not\sim \delta'_2} \left(\mathcal{Q}(\delta'_1,\delta_1)\mathcal{Q}(\delta'_2,\delta_2) - \mathcal{Q}(\delta'_2,\delta_1)\mathcal{Q}(\delta'_1,\delta_2)\right) \mathcal{L}_1(\delta'_1)\mathcal{L}_2(\delta'_2)$$
$$+ \sum_{\delta'_1 < \delta'_2} \left(\mathcal{Q}(\delta'_1,\delta_1)\mathcal{Q}(\delta'_2,\delta_2) - \mathcal{Q}(\delta'_2,\delta_1)\mathcal{Q}(\delta'_1,\delta_2)\right) \left(\mathcal{L}_1(\delta'_1)\mathcal{L}_2(\delta'_2) - \mathcal{L}_1(\delta'_2)\mathcal{L}_2(\delta'_1)\right) .$$

Elle est bien négative lorsque $\mathcal{Q}$ vérifie (5.21) et (5.22). L'inégalité (ii) se déduit facilement de la définition de $\mathbb{F}$.

■

Le cas des spécifications répulsives suggère la définition d'un autre type de chaînes de Markov. L'arbre de Cayley est bipartite. Ses sommets peuvent être séparés en deux ensembles stables S_p et S_i qui représentent respectivement les sommets pairs et impairs. Nous nous intéressons aux chaînes de Markov de $\mathcal{G}(\rho)$ invariantes par isomorphisme de graphes laissant S_p (ou S_i) invariant. Ces chaînes sont dites alternées.

Définition 5.3.4 *Une loi de bord $l = \{l_{xy}\}_{xy \in \vec{L}}$ est dite alternée si*

$$\exists \mathcal{L}_p, \mathcal{L}_i \in]0,\infty[^B \quad t.q. \quad \forall xy \in \vec{L}\ , \quad l_{xy} \ = \ \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{L}_p & si & x \in S_p \\ \mathcal{L}_i & si & x \in S_i \end{array} \right. .$$

Une chaîne de Markov est dite alternée si elle est représentée par une loi de bord alternée.

Les chaînes de Markov alternées sont en bijection avec les couples $(\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_i)$ d'éléments de Ψ_B solutions des équations

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{L}_p & = & \mathbb{F}(\mathcal{L}_i) \\ \mathcal{L}_i & = & \mathbb{F}(\mathcal{L}_p) \quad . \end{array} \tag{5.23}$$

Pour $(\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_i)$ solution de (5.23), $\mathcal{L}_p$ est solution de

$$\mathcal{L}_p \;=\; \mathbb{F}^{(2)}(\mathcal{L}_p) \quad . \tag{5.24}$$

Nous notons $\mathbb{F}^{(2)}$ pour $\mathbb{F} \circ \mathbb{F}$. Inversement, si $\mathcal{L}_p$ est solution de (5.24) alors $(\mathcal{L}_p, \mathbb{F}(\mathcal{L}_p))$ est solution de (5.23) . Il vient donc la caractérisation suivante des chaînes de Markov alternées de $\mathcal{G}(\rho)$.

Proposition 5.3.5 *Soit ρ une spécification de Markov homogène sur l'arbre de Cayley T^r, de matrice de transfert $\mathcal{Q}$. A chaque solution $\mathcal{L} \in \Psi_B$ de $\mathcal{L} = \mathbb{F}^{(2)}(\mathcal{L})$ correspond une et une seule chaîne de Markov alternée de $\mathcal{G}(\rho)$.*

Si $(\mathcal{L}_p, \mathcal{L}_i)$ correspond à une chaîne de Markov alternée, $(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_p)$ correspond donc également à une chaîne de Markov alternée distincte de la précédente si $\mathcal{L}_p \neq \mathcal{L}_i$. Ces deux chaînes sont dites complémentaires. Dans le cas des spécifications répulsives, il est possible de montrer, comme dans [58], que l'absence de transition de phase est équivalente à l'égalité de deux chaînes de Markov complémentaires. Nous rappelons la construction de ces deux chaînes. Soit $\mathcal{Q}$ vérifiant (5.21) et (5.22). Soit la suite $(\mathcal{L}_m)_m$ d'éléments de $\Psi_B \cup \{\mathbb{1}_\chi\}$ vérifiant

$$\mathcal{L}_0 = \mathbb{1}_\chi \quad \text{et} \quad \forall m \geq 1,\ \mathcal{L}_m = \mathbb{F}(\mathcal{L}_{m-1})\ .$$

Notons que $\mathbb{F}(\mathbb{1}_\chi) \in \Psi_B$ et $\mathcal{L}_m \in \Psi_B$ dès que $m \geq 1$. Il est clair que $\mathcal{L}_0 \prec \mathcal{L}_2$ car χ est minimum. Par la propriété (ii) de la proposition 5.3.4, nous en déduisons

$$\forall m \geq 1, \quad \mathcal{L}_{2m-2} \prec \mathcal{L}_{2m} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{2m-1} \succ \mathcal{L}_{2m+1}\ .$$

De même, $\mathcal{L}_0 \prec \mathcal{L}_1$ et

$$\forall m \geq 1, \quad \mathcal{L}_{2m} \prec \mathcal{L}_{2m+1}\ .$$

D'autre part, pour $\mathcal{L}_1 \prec \mathcal{L}_2$, l'inégalité (5.18) avec $\delta_1 = \gamma$ s'écrit

$$\forall \delta \geq \gamma, \quad \mathcal{L}_1(\delta) \leq \mathcal{L}_2(\delta)\ .$$

Avec $\delta_2 = \gamma$, il vient

$$\forall \delta \leq \gamma,\ \mathcal{L}_1(\delta) \geq \mathcal{L}_2(\delta)\ .$$

Ainsi pour une suite $(\varphi_m)_m$ de Ψ_B croissante majorée (ou de manière symétrique décroissante minorée), pour tout δ dans B, la suite $(\varphi_m(\delta))_m$ est soit croissante majorée soit décroissante minorée. Dans les deux cas, elle converge et la suite $(\varphi_m)_m$ converge dans Ψ_B pour la topologie introduite dans [58], p. 250. Par définition, $\varphi_m \to \varphi$ dans Ψ_B si et seulement si pour tout δ dans B, $\varphi_m(\delta) \to \varphi(\delta)$ dans $]0, \infty[$. Nous en déduisons que les suites adjacentes $(\mathcal{L}_{2m})_m$ et $(\mathcal{L}_{2m+1})_m$ convergent respectivement dans Ψ_B vers des limites notées $\mathcal{L}_p$ et $\mathcal{L}_i$. Par continuité de $\mathbb{F}$ (voir [58] p. 250), ces limites vérifient les équations (5.23) et définissent deux chaînes de Markov complémentaires. De plus, pour toute loi de bord normalisée $l = \{l_{xy}\}_{xy \in \vec{L}}$, nous avons

$$\forall xy \in \vec{L}, \quad \mathcal{L}_0 \prec l_{xy}\ .$$

Grâce à la relation (5.17) et à la propriété (i) de la proposition 5.3.4, nous en déduisons

$$\forall xy \in \vec{L}, \quad l_{xy} \prec \mathcal{L}_1 ,$$

puis

$$\forall m \geq 1, \forall xy \in \vec{L}, \quad \mathcal{L}_{2m} \prec l_{xy} \prec \mathcal{L}_{2m+1} .$$

Soit en passant à la limite

$$\forall xy \in \vec{L}, \quad \mathcal{L}_p \prec l_{xy} \prec \mathcal{L}_i .$$

D'où le résultat qui suit (théorème 4.1 (1), p. 253, [58]).

Proposition 5.3.6 *Soit ρ une spécification de Markov homogène de matrice de transfert $\mathcal{Q}$. Soit χ le plus petit élément de B muni d'un ordre partiel $\leq$ et $I\!F$ définie en (5.20). Soit la suite d'éléments de $\Psi_B \cup \{\mathbb{1}_\chi\}$ donnée par*

$$\mathcal{L}_0 = \mathbb{1}_\chi \quad \textit{et} \quad \forall m \geq 1, \quad \mathcal{L}_m = I\!F(\mathcal{L}_{m-1}) .$$

Si ρ est une spécification de Markov homogène répulsive au sens de la définition 5.3.3, les sous-suites $(\mathcal{L}_{2m})_m$ et $(\mathcal{L}_{2m+1})_m$ convergent respectivement vers des limites $\mathcal{L}_p$ et $\mathcal{L}_i$. L'égalité $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_i$ est alors équivalente à l'existence d'une unique mesure de Gibbs dans $\mathcal{G}(\rho)$.

Dans la section suivante, nous en déduisons une condition nécessaire et suffisante de transition de phase pour le PP sur $K_n \times T^r$ lorsque $n \leq 2$. Nous précisons le choix de l'ordre sur B pour lequel les specifications sont répulsives. Pour $n \geq 3$, il n'existe pas d'ordre convenable, même partiel, sur B. Nous procédons donc différemment pour obtenir une condition suffisante de transition de phase. Enfin, nous faisons le lien avec la méthode employée dans la section 5.2.

5.4 Application au processus des philosophes sur des arbres échelles

Les mesures réversibles du PP sur $K_n \times T^r$ peuvent être vues comme des champs de Markov sur T^r avec $B = \mathcal{A}_{K_n}$. L'état de référence γ est l'état où tous les philosophes sont à 0. Ce choix est imposé par la nécessité d'avoir des champs de Markov vérifiant la condition "w_o" (voir section 5.3). Pour δ dans B, nous notons $\#(\delta)$ le nombre de philosophes à 1 dans δ. Les mesures réversibles correspondent à une spécification homogène déterminée par la matrice $\mathcal{Q}$ de terme général (avec $d = r-1$) $\mathcal{Q}(\delta,\delta') = \lambda^{\frac{\#(\delta)+\#(\delta')}{d+1}}$ si δ et δ' sont compatibles et $\mathcal{Q}(\delta,\delta') = 0$ sinon. Soit

$$\mathcal{Q} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & \lambda^{\frac{1}{d+1}} & \ldots & \ldots & \lambda^{\frac{1}{d+1}} \\ \lambda^{\frac{1}{d+1}} & 0 & \lambda^{\frac{2}{d+1}} & \ldots & \lambda^{\frac{2}{d+1}} \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & 0 & \\ \lambda^{\frac{1}{d+1}} & \lambda^{\frac{2}{d+1}} & \ldots & \lambda^{\frac{2}{d+1}} & 0 \end{bmatrix} . \tag{5.25}$$

L'expression de $\mathcal{Q}$ peut se déduire par exemple de la relation (2.29) du chapitre 2 et de la réversibilité de ν. Dans la suite nous posons $\epsilon = \lambda^{\frac{1}{d+1}}$.

Pour le PP sur ces arbres échelles, il peut se produire une transition de phase. Nous avons donné des conditions sous lesquelles il n'y a pas unicité de la mesure réversible, *i.e.* il existe plusieurs champs de Markov pour la matrice $\mathcal{Q}$ ci-dessus. Nous cherchons à présent des conditions sous lesquelles cela ne se produit pas. Dans ce but il est naturel d'étudier les champs de Markov extrémaux et donc (proposition 5.3.1) les chaînes de Markov. Nous obtenons des résultats analogues à ceux obtenus dans le cas du modèle d'Ising antiferromagnétique sur T^r (voir par exemple [26]). Comme pour ces modèles, il n'y a qu'une seule chaîne de Markov homogène.

Proposition 5.4.1 *Parmi les mesures réversibles du processus des philosophes sur $K_n \times T^r$, il n'existe qu'une seule chaîne de Markov homogène.*

Démonstration. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans $]0, \infty[$. D'après la proposition 5.3.3, il suffit de regarder les solutions $\mathcal{L} = (1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de l'équation $\mathcal{L} = \mathbb{F}(\mathcal{L})$ avec $\mathcal{Q}$ donnée par (5.25) . Nous cherchons donc les solutions du système d'équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & \epsilon^d \left(\dfrac{1+\epsilon \sum\limits_{k \neq 1} \alpha_k}{1+\epsilon \sum\limits_{k} \alpha_k} \right)^d \\ \vdots & & \\ \alpha_i & = & \epsilon^d \left(\dfrac{1+\epsilon \sum\limits_{k \neq i} \alpha_k}{1+\epsilon \sum\limits_{k} \alpha_k} \right)^d \\ \vdots & & \\ \alpha_n & = & \epsilon^d \left(\dfrac{1+\epsilon \sum\limits_{k \neq n} \alpha_k}{1+\epsilon \sum\limits_{k} \alpha_k} \right)^d \end{array} \right. \tag{5.26}$$

Pour i, j distincts, en utilisant l'identité

$$a^d - b^d \;=\; (a-b) \sum_{u=0}^{d-1} a^u \, b^{d-1-u} \quad ,$$

il vient

$$\alpha_i - \alpha_j \;=\; (\alpha_j - \alpha_i) \quad H(\alpha_i, \alpha_j)$$

avec

$$H(\alpha_i, \alpha_j) \quad = \quad \frac{\epsilon^{d+1}}{(1+\epsilon\sum_k \alpha_k)^d} \sum_{u=0}^{d-1} (1+\epsilon\sum_{k\neq i}\alpha_k)^u \, (1+\epsilon\sum_{k\neq j}\alpha_k)^{d-1-u} \quad .$$

Le facteur $H(\alpha_i, \alpha_j)$ étant toujours strictement positif, α_i et α_j sont nécessairement égaux. Posons donc

$$F_n(u) \quad = \quad \epsilon^d \left(\frac{1+(n-1)\epsilon\, u}{1+n\epsilon\, u}\right)^d \quad . \tag{5.27}$$

Les solutions de (5.26) sont de la forme $(\alpha, \ldots, \alpha)$ avec α solution de

$$\alpha \quad = \quad F_n(\alpha) \quad . \tag{5.28}$$

La fonction F_n est strictement décroissante avec $F_n(0) = \epsilon^d$ et $F_n(+\infty) = (\frac{n-1}{n}\,\epsilon)^d$ et (5.28) a une unique solution. Il n'y a donc qu'une seule chaîne de Markov homogène.

■

En revanche pour un taux λ assez grand, il peut exister plusieurs chaînes de Markov alternées. Pour les cas $n = 1$ et $n = 2$, les résultats de la section 5.3 s'appliquent et nous pouvons déduire directement de la proposition 5.3.6 le résultat suivant qui généralise le cas du modèle d'Ising antiferromagnétique sur T^r.

Proposition 5.4.2 *Soit le processus des philosophes sur $K_n \times T^r$ avec $n \leq 2$. Il existe une unique mesure réversible si et seulement si il existe une unique chaîne de Markov alternée.*

Démonstration. Montrons que l'espace d'états B peut être muni d'un ordre tel que les résultats de la section 5.3 s'appliquent. L'état de référence γ doit par hypothèse être comparable à tous les autres états. De plus, pour que la matrice $\mathcal{Q}$ donnée en (5.25) corresponde à une spécification répulsive certaines contraintes doivent être satisfaites. Lorsque les termes des inégalités (5.21) et (5.22) sont non nuls, ces dernières sont clairement vraies. Les deux membres valent alors

$$\epsilon^{\#(\delta_1)+\#(\delta_2)+\#(\delta_1')+\#(\delta_2')} \; .$$

Aussi, il suffit de vérifier que lorsque les membres de droite sont nuls, il en est de même pour ceux de gauche. Supposons, par exemple, $\mathcal{Q}(\delta_2', \delta_1) = 0$. Pour le PP sur $K_n \times T^r$, cela signifie que $\delta_1 = \delta_2' = \delta \neq \gamma$. L'inégalité (5.21) est alors vérifiée si $\mathcal{Q}(\delta_1', \delta_1) = 0$ ou $\mathcal{Q}(\delta_2', \delta_2) = 0$, *i.e.* si $\delta_1' = \delta$ ou $\delta_2 = \delta$. L'inégalité (5.21) ne peut donc être vraie pour tout $\delta_1 \leq \delta_2$ et $\delta_1' \leq \delta_2'$, que si tout $\delta \neq \gamma$ est soit maximal soit minimal pour $\leq$. Pour $n = 2$, il suffit de prendre l'une des configurations non nulles comme élément minimum et l'autre comme élément maximum. L'espace B est alors muni d'un ordre total pour lequel le PP est répulsif au sens de la définition 5.3.3 et la proposition 5.3.6 donne le résultat.

■

Remarquons que pour $n \leq 2$, les graphes $K_n \times T^r$ sont bipartites et la proposition ci-dessus peut également se déduire du lemme 3.2 de [51]. Pour de tels graphes, il est possible de transformer le PP en un système de spins monotone en inversant l'ordre sur $\{0,1\}$ pour les sommets d'un des stables du graphe. Les résultats classiques de [36] s'appliquent alors.

Pour $n \geq 3$, nous ne pouvons appliquer directement la proposition 5.3.6. Pour les raisons évoquées dans la démonstration ci-dessus, il n'existe pas d'ordre total sur B tel que $\mathcal{Q}$ vérifie (5.21). Nous examinons le cas où B est partiellement ordonné. Il faut alors également vérifier (5.22) pour tout $\delta_1 \leq \delta_2$ et $\delta_1' \not\sim \delta_2'$. Or, ceci n'est pas possible dès qu'il existe plus de deux états non nuls non comparables. Les relations (5.21) et (5.22) ne peuvent donc être simultanément satisfaites. En ce sens, le PP sur $K_n \times T^r$ ne peut pas être vu comme un processus répulsif sur T^r.

Nous donnons à présent des conditions plus explicites de transition de phase. Pour $n \leq 2$, l'existence d'une unique chaîne de Markov alternée est équivalente à l'unicité de la solution d'un système d'au plus deux équations. Nous déduisons donc de la proposition 5.3.6 des conditions nécessaires et suffisantes de transition de phase qui portent sur le taux λ (propositions 5.4.3 et 5.4.4). Pour $n \geq 3$, l'unicité de la chaîne de Markov et de la mesure réversible peut encore se déduire de l'unicité de la solution d'un système d'équations de dimension 2. Nous n'obtenons toutefois (proposition 5.4.5) qu'une condition suffisante d'unicité car les solutions de ce système ne correspondent pas à des chaînes de Markov alternées (ni à des chaînes de Markov plus générales). Nous présentons donc successivement les cas de T^r et $K_2 \times T^r$ puis le cas des graphes $K_n \times T^r$ pour $n \geq 3$.

Proposition 5.4.3 *Soit T^r l'arbre de Cayley d'ordre r avec $r \geq 3$. Soit λ_c la valeur*

$$\lambda_c \;=\; \frac{1}{r-1}\,\left(\frac{r-1}{r-2}\right)^r \quad .$$

Le processus des philosophes sur T^r a une unique mesure réversible si et seulement si $\lambda \leq \lambda_c$.

Démonstration. Avec $d = r-1$ nous pouvons encore écrire $\lambda_c = \frac{1}{d}\,\left(\frac{d}{d-1}\right)^{d+1}$. D'après la proposition 5.3.2, les chaînes de Markov correspondent aux lois de bord normalisées $l = \{l_{xy}\}_{xy\in\vec{L}}$. Sur T^r, pour tout xy dans $\vec{L}$, $l_{xy} = (1, \alpha_{xy})$ avec $\alpha_{xy} \in\,]0,\infty[$. Les chaînes de Markov alternées correspondent (proposition 5.3.5) aux solutions $\alpha \in\,]0,\infty[$ de l'équation

$$\alpha \;=\; F_1^{(2)}(\alpha) \tag{5.29}$$

où $F_1^{(2)}$ désigne $F_1 \circ F_1$ et

$$F_1(u) \;=\; \epsilon^d \left(\frac{1}{1+\epsilon u}\right)^d \quad . \tag{5.30}$$

D'après la proposition 5.4.2, l'unicité de la mesure réversible est équivalente à l'existence d'un unique point fixe pour $F_1^{(2)}$. Nous étudions donc les variations de la fonction $G(u) = F_1^{(2)}(u) - u$. Sa dérivée est

$$G'(u) \;=\; (d\epsilon)^2\; k(u)\; k(F_1(u)) - 1 \quad ,$$

avec $k(u) = \dfrac{F_1(u)}{1+\epsilon u}$. L'étude de la fonction $k(u)\; k(F_1(u))$ montre qu'elle admet une valeur maximum égale à

$$\frac{(\epsilon^{d+1}(d-1))^{\frac{d^2-1}{d}}}{d^{d+1}\ \epsilon^{d^2+1}} \quad .$$

Ainsi

$$G'(u) \quad \leq \quad \frac{(\lambda(d-1))^{\frac{d^2-1}{d}}}{d^{d-1}\ \lambda^{d-1}} - 1 \quad ,$$

c'est-à-dire

$$G'(u) \quad \leq \quad \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{\frac{d-1}{d}} - 1 \quad .$$

D'où pour $\lambda \leq \lambda_c$, $G(u)$ est strictement décroissante avec $G(0)$ strictement positif et $G(\epsilon^d)$ strictement négatif. Nous en déduisons que $F_1^{(2)}$ a un point fixe unique dans $[0, \epsilon^d]$. Inversement, si $\lambda > \lambda_c$, nous avons montré, dans la section 5.2, que l'unique point fixe de F_1 n'était pas stable. Ainsi les suites adjacentes $(F_1^{(2m)}(0))_m$ et $(F_1^{(2m+1)}(0))_m$ ne peuvent converger vers la même limite et $F_1^{(2)}$ possède au moins deux points fixes qui correspondent à deux chaînes de Markov alternées distinctes.

■

Pour $n = 2$, nous pensons que la proposition qui suit est vraie. Nous n'en donnons toutefois pas une démonstration complète et précisons le point qu'il resterait à prouver. Des simulations numériques (voir figure 5.1) semblent confirmer d'autre part ce résultat.

Proposition 5.4.4 *Soit $r \geq 3$. Soit λ_c la valeur*

$$\lambda_c \quad = \quad \frac{1}{r-2}\left(\frac{r}{r-1}\right)^{r-1} \quad .$$

Le processus des philosophes sur $K_2 \times T^r$ a une unique mesure réversible si et seulement si $\lambda \leq \lambda_c$.

Ebauche de démonstration. Dans le cas $K_2 \times T^r$, Les chaînes de Markov correspondent aux lois de bord $l = \{l_{xy}\}_{xy \in \vec{L}}$ avec $l_{xy} = (1, \alpha^1_{xy}, \alpha^2_{xy})$ où α^1_{xy} et α^2_{xy} vérifient pour tout xy dans $\vec{L}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha^1_{xy} & = & \epsilon^d \displaystyle\prod_{z \in N(x)-\{y\}} \frac{1+\epsilon\alpha^2_{zx}}{1+\epsilon(\alpha^1_{zx}+\alpha^2_{zx})} \\ \alpha^2_{xy} & = & \epsilon^d \displaystyle\prod_{z \in N(x)-\{y\}} \frac{1+\epsilon\alpha^1_{zx}}{1+\epsilon(\alpha^1_{zx}+\alpha^2_{zx})} \quad . \end{array}\right. \tag{5.31}$$

En particulier, les chaînes de Markov alternées correspondent aux solutions du système

$$\left\{\begin{array}{lclcl} \tilde{g}_2(\alpha_1,\alpha_2) & = & g_2(\alpha_1,\alpha_2) - \alpha_1 & = & 0 \\ \tilde{g}_2(\alpha_2,\alpha_1) & = & g_2(\alpha_2,\alpha_1) - \alpha_2 & = & 0 \end{array}\right. \tag{5.32}$$

avec

$$\begin{aligned} g_2(u_1,u_2) &= f_2(f_2(u_1,u_2), f_2(u_2,u_1)) \\ \text{et} \quad f_2(u_1,u_2) &= \epsilon^d \left(\frac{1+\epsilon u_2}{1+\epsilon(u_1+u_2)} \right)^d \quad . \end{aligned}$$

Pour pouvoir appliquer la proposition 5.3.6, nous ordonnons B comme indiqué précédemment. Nous supposons que la composante α^1_{xy} correspond à l'état minimum, noté χ, et α^2_{xy} à l'état maximum. Nous nous intéressons aux suites $(\mathbb{F}^{(2m)}(\mathcal{L}_0))_m$ et $(\mathbb{F}^{(2m+1)}(\mathcal{L}_0))_m$ avec $\mathcal{L}_0 = \mathbb{1}_\chi = (0,1,0)$. Notons que $\mathcal{L}_1 = \mathbb{F}(\mathcal{L}_0) = (1,0,\epsilon^d)$. Ceci revient à considérer les suites $(\alpha^1_m)_m$ et $(\alpha^2_m)_m$ définies par

$$\begin{cases} \alpha^1_0 &= 0 \\ \alpha^2_0 &= \epsilon^d \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \alpha^1_m &= g_2(\alpha^1_{m-1}, \alpha^2_{m-1}) \\ \alpha^2_m &= g_2(\alpha^2_{m-1}, \alpha^1_{m-1}) \end{cases} \quad . \tag{5.33}$$

Si ces suites convergent vers la même limite, elles convergent vers α l'unique solution de $\alpha = F_2(\alpha)$. La suite $(\mathbb{F}^{(2m+1)}(\mathcal{L}_0))_m$ converge alors vers $\mathcal{L}_i = (1,\alpha,\alpha)$ qui est point fixe de $\mathbb{F}$. D'où $\mathcal{L}_p = \mathbb{F}(\mathcal{L}_i) = \mathcal{L}_i$. L'unicité de la mesure réversible en découle. En fait, il est facile de montrer que

$$\forall m\ ,\ \forall xy \in \vec{L}\ ,\ \forall i\ , \quad \alpha^1_m \le \alpha^i_{xy} \le \alpha^2_m \quad . \tag{5.34}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le taux λ pour qu'il y ait transition de phase revient donc à trouver une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que les suites $(\alpha^1_m)_m$ et $(\alpha^2_m)_m$ convergent vers α. Ces suites convergent vers (α_1,α_2) solutions du système (5.32). Il y a unicité de la mesure réversible si et seulement si ce système a pour unique solution (α,α) avec $\alpha = F_2(\alpha)$. Lorsque $\lambda = 0$, le système (5.32) a pour unique solution $(0,0)$ qui est bien point fixe de F_2. Nous nous intéressons à la façon dont les solutions de (5.32) varient lorsque le paramètre λ augmente. Ceci nous conduit à formuler le problème en termes de bifurcations (voir [40] ou [28]). Pour préciser la dépendance en λ, nous notons $\tilde{g}_2(\lambda,u_1,u_2)$ pour $\tilde{g}_2(u_1,u_2)$ et $\alpha(\lambda)$ le point fixe de F_2. Nous considérons les solutions $(\lambda,\alpha_1,\alpha_2)$ du système

$$F(\lambda,\alpha_1,\alpha_2) \;=\; 0\ , \tag{5.35}$$

où la fonction F est donnée par

$$F : \begin{cases} I\!R^3_+ & \to \quad I\!R^2 \\ (\lambda,u_1,u_2) & \to \quad F(\lambda,u_1,u_2) = \begin{cases} \tilde{g}_2(\lambda,u_1,u_2) \\ \tilde{g}_2(\lambda,u_2,u_1) \end{cases} \end{cases} .$$

Un point de bifurcation est un point $(\lambda_0,\alpha_1,\alpha_2)$ solution de (5.35) au voisinage duquel il existe deux points (λ,v_1,v_2) et (λ,w_1,w_2) solutions de (5.35) avec (v_1,v_2) et (w_1,w_2) distincts. Cela signifie que pour une valeur λ du paramètre proche de λ_0, (5.32) a au moins deux solutions (v_1,v_2) et (w_1,w_2). Pour tout λ positif, une solution particulière de (5.32) est $(\alpha(\lambda),\alpha(\lambda))$. Lorsque λ varie, les points $\{(\lambda,\alpha(\lambda),\alpha(\lambda)),\ \lambda \in I\!R_+, \alpha(\lambda) = F_2(\alpha(\lambda))\}$ forment une courbe continue dans $\mathbb{R}_+^3$, solution de (5.35). La continuité de $\alpha(\lambda)$ en λ peut se déduire facilement du corollaire 1.5.10 p. 38 de [3] car le point fixe de F_2 est l'unique racine réelle positive d'un polynôme à coefficients réels dépendant continument de λ. Nous commençons par déterminer les points de bifurcation appartenant à cette courbe. Pour cela nous calculons (à λ fixé) le déterminant jacobien du système (5.32) pris en $(\alpha(\lambda), \alpha(\lambda))$ noté simplement (α, α) dans les calculs qui suivent. Les points de bifurcation correspondent à des valeurs de λ pour lesquelles ce déterminant s'annule. Ce dernier est donné par

$$\left(\frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial u_1}(\alpha,\alpha)\right)^2 - \left(\frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial u_2}(\alpha,\alpha)\right)^2 ,$$

avec

$$\frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial u_1}(\alpha,\alpha) = \frac{\partial g_2}{\partial u_1}(\alpha,\alpha) - 1 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\alpha,\alpha)\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\alpha,\alpha)\right)^2 - 1 ,$$

et

$$\frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial u_2}(\alpha,\alpha) = \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(\alpha,\alpha) = 2\frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\alpha,\alpha)\,\frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\alpha,\alpha) .$$

Le déterminant jacobien se factorise donc en

$$\left(\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\alpha,\alpha) + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\alpha,\alpha)\right)^2 - 1\right)\left(\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\alpha,\alpha) - \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\alpha,\alpha)\right)^2 - 1\right) ,$$

avec

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\alpha,\alpha) = \frac{-d\epsilon\alpha}{1+2\epsilon\alpha}$$

et

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\alpha,\alpha) = -\frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\alpha,\alpha)\frac{\epsilon\alpha}{1+\epsilon\alpha} .$$

Ainsi, le déterminant s'annule pour les couples (ϵ, α) vérifiant

$$d\epsilon\alpha = 1 + \epsilon\alpha \tag{5.36}$$

ou

$$d\epsilon\alpha = (1+\epsilon\alpha)(1+2\epsilon\alpha) . \tag{5.37}$$

Or α est point fixe de F_2 et vérifie

$$\epsilon\alpha = \epsilon^{d+1}\left(\frac{1+\epsilon\alpha}{1+2\epsilon\alpha}\right)^d ,$$

i.e.

$$\lambda = \epsilon^{d+1} = \epsilon\alpha\left(\frac{1+2\epsilon\alpha}{1+\epsilon\alpha}\right)^d .$$

Si $d \geq 2$, l'équation (5.36) conduit à la solution $\epsilon\alpha = 1/(d-1)$, *i.e.*

$$\lambda = \frac{1}{d-1}\left(\frac{d+1}{d}\right)^d = \lambda_c .$$

Nous pouvons remarquer que l'équation (5.37) s'écrit encore $F_2'(\alpha) = -1$. Les solutions de (5.37) correspondent à des valeurs où la stabilité du point fixe de F_2 est susceptible de changer. Posons $u = \epsilon\alpha$. Nous cherchons les solutions de

$$du = (1+u)(1+2u) \tag{5.38}$$

d'où nous déduisons les solutions de (5.37) avec

$$\epsilon^{d+1} = u\left(\frac{1+2u}{1+u}\right)^d \qquad \text{et } \alpha = \frac{u}{\epsilon}\ .$$

Les solutions de (5.38) sont les racines du polynôme

$$2u^2 + (3-d)u + 1 = 0\ .$$

Son discrimant vaut $(d-3)^2 - 8$. Si $d \leq 5$, il est strictement négatif et (5.38) n'a pas de solutions. Il y a donc au plus un point de bifurcation en $\lambda = \lambda_c$. Si $d \geq 6$, le discriminant est strictement positif. L'équation (5.38) a deux solutions qui correspondent à deux valeurs de λ. La plus petite est notée λ_1. Nous avons

$$\lambda_1 = u\left(\frac{1+2u}{1+u}\right)^d\ ,$$

avec

$$u = \frac{d-3-\sqrt{(d-3)^2-8}}{4}\ .$$

De plus, pour $d \geq 6$, il est facile de vérifier que $1/(d-1) \leq 1/5$ et $u \geq 3/4$. Ainsi $u > 1/(d-1)$ et nous en déduisons $\lambda_1 > \lambda_c$. Pour tout d, λ_c est donc la plus petite valeur de bifurcation. Ceci signifie que pour $\lambda < \lambda_c$, la courbe $\{(\lambda, \alpha(\lambda), \alpha(\lambda)),\ \lambda \in I\!R_+\}$ solution de (5.35) est localement unique. Il n'existe pas d'autres courbes solutions de (5.35) dans un voisinage de cette solution. Le terme "localement" est important. Dans le cas général, cela ne suffit pas à prouver que pour $\lambda \leq \lambda_c$, (5.32) n'a qu'une seule solution. Toutefois, pour avoir l'unicité de la mesure réversible nous n'avons pas besoin de connaître toutes les solutions de (5.32) mais seulement celles qui sont atteintes comme limites des suites definies en (5.33). Nous notons ces dernières $(\alpha_m^1(\lambda))_m$ et $(\alpha_m^2(\lambda))_m$ pour préciser la dépendance en λ. Montrer qu'il y a une unique mesure réversible est équivalent à montrer que $(\alpha_m^1(\lambda))_m$ et $(\alpha_m^2(\lambda))_m$ convergent vers la même limite. Pour $n = 2$, ceci est en fait équivalent à montrer que (5.32) a une seule solution mais ce ne sera plus forcément vrai pour $n \geq 3$. Notons $\alpha^1(\lambda)$ et $\alpha^2(\lambda)$ les limites des suites $(\alpha_m^1(\lambda))_m$ et $(\alpha_m^2(\lambda))_m$. Nous avons $\alpha^1(0) = 0$ et $\alpha^2(0) = 0$. Nous cherchons la plus petite valeur de λ au dessus de laquelle $\alpha^1(\lambda)$ et $\alpha^2(\lambda)$ diffèrent. Pour cela nous considérons les suites de fonctions continues de $I\!R_+$, $(\alpha_m^1(.))_m$ et $(\alpha_m^2(.))_m$. Elles convergent point par point vers les fonctions $\alpha^1(.)$ et $\alpha^2(.)$. Si ces limites sont continues en λ, les points $\{(\lambda, \alpha^1(\lambda), \alpha^2(\lambda)),\ \lambda \in I\!R_+\}$ sont solutions de (5.35) et constituent une courbe continue dans $I\!R_+^3$ qui passe par $(0,0,0)$. Pour $\lambda < \lambda_c$, nous avons d'autre part montré que la courbe solution de (5.35) donnée par les points $\{(\lambda, \alpha(\lambda), \alpha(\lambda)), \lambda \in I\!R_+\}$ était localement unique. Nous pouvons en déduire que pour $\lambda \leq \lambda_c$, $\alpha_1(\lambda) = \alpha_2(\lambda) = \alpha(\lambda)$. D'où l'existence d'une unique mesure réversible. Comme par ailleurs nous avons montré dans la proposition 5.2.1 qu'il y avait transition de phase pour $\lambda > \lambda_c$, il vient la condition nécessaire et suffisante annoncée.

■

La démonstration ci-dessus repose sur la continuité des fonctions $\alpha^1(.)$ et $\alpha^2(.)$. Pour $i = 1, 2$, la suite $(\alpha^i_m(.))_m$ étant monotone, la continuité de $\alpha^i(.)$ est équivalente à la convergence uniforme de $(\alpha^i_m(.))_m$. Ceci vient du théorème de Dini (théorème 7.2.2 p. 136 de [15]). Nous n'avons pas résolu cette question mais nous avons vérifié par simulations numériques que pour $\lambda \leq \lambda_c$ les suites définies en (5.33) convergeaient vers la même limite. Dans la figure 5.1, nous avons représenté, dans le cas $d = 2$, les limites de ces suites pour différentes valeurs de λ de part et d'autre de la valeur critique 2.25. Pour $\lambda \leq 2.25$, elles sont égales et (5.32) n'a qu'une seule solution du type (α, α). Pour $\lambda > 2.25$, les limites diffèrent et correspondent aux points (α^1, α^2) avec $\alpha^1 < \alpha^2$. Le système (5.32) a donc en plus de la solution (α, α), d'autres solutions symétriques par rapport à la première bissectrice.

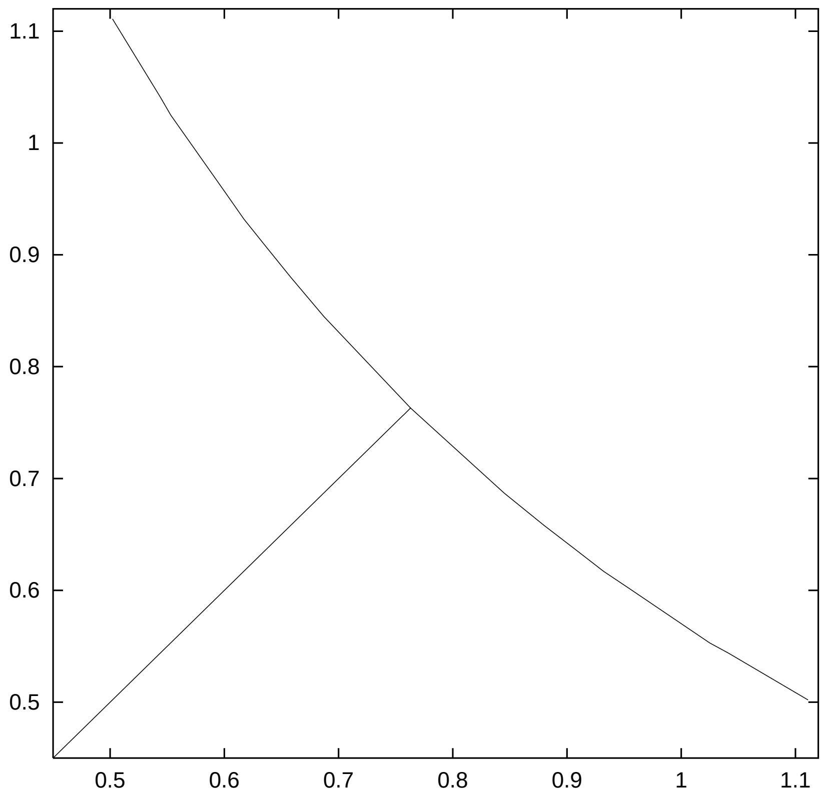


FIG. 5.1: Solutions de (5.32) pour λ variant de 0.63 à 2.40 ($n = d = 2$).

Nous considérons à présent le cas des arbres échelles $K_n \times T^r$ pour $n \geq 3$. Les chaînes de Markov correspondent aux lois de bord $l = \{l_{xy}\}_{xy\in\vec{L}}$ avec $l_{xy} = (1, \alpha^1_{xy}, \ldots, \alpha^n_{xy})$ et

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha^1_{xy} & = & \epsilon^d \displaystyle\prod_{z\in N(x)\setminus\{y\}} \frac{1+\epsilon\sum_{k\neq 1} \alpha^k_{zx}}{1+\epsilon\sum_{k} \alpha^k_{zx}} \\ \vdots & & \\ \alpha^i_{xy} & = & \epsilon^d \displaystyle\prod_{z\in N(x)\setminus\{y\}} \frac{1+\epsilon\sum_{k\neq i} \alpha^k_{zx}}{1+\epsilon\sum_{k} \alpha^k_{zx}} \\ \vdots & & \\ \alpha^n_{xy} & = & \epsilon^d \displaystyle\prod_{z\in N(x)\setminus\{y\}} \frac{1+\epsilon\sum_{k\neq n} \alpha^k_{zx}}{1+\epsilon\sum_{k} \alpha^k_{zx}} \end{array}\right. \tag{5.39}$$

Posons

$$f_n(u_1, \ldots, u_n) \;=\; \epsilon^d \left(\frac{1+\epsilon\sum_{k\neq 1} u_k}{1+\epsilon\sum_{k} u_k}\right)^d .$$

Nous notons pour simplifier $u_{(-i)} = (u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)$
et $f_n(u_1, u_{(-1)}) = f_n(u_1, \ldots, u_n)$. Les chaînes de Markov alternées correspondent aux solutions $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ du système

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f_n(f_n(\alpha_1, \alpha_{(-1)}), f_n(\alpha_2, \alpha_{(-2)}), \ldots, f_n(\alpha_n, \alpha_{(-n)})) - \alpha_1 & = & \tilde{g}_n(\alpha_1, \alpha_{(-1)}) & = & 0 \\ \vdots & & & & \\ f_n(f_n(\alpha_i, \alpha_{(-i)}), f_n(\alpha_1, \alpha_{(-1)}), \ldots, f_n(\alpha_n, \alpha_{(-n)})) - \alpha_i & = & \tilde{g}_n(\alpha_i, \alpha_{(-i)}) & = & 0 \\ \vdots & & & & \\ f_n(f_n(\alpha_n, \alpha_{(-n)}), f_n(\alpha_1, \alpha_{(-1)}), \ldots, f_n(\alpha_{n-1}, \alpha_{(-(n-1))})) - \alpha_n & = & \tilde{g}_n(\alpha_n, \alpha_{(-n)}) & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour $n \geq 3$, nous ne savons pas montrer de proposition analogue à la proposition 5.4.2. Nous pouvons cependant obtenir, comme dans le cas $n = 2$, une condition suffisante d'unicité en étudiant un système de dimension 2. En effet, les équations (5.39) montrent que

$$\forall i\, ,\ \forall xy \in \vec{L}\ ,\quad 0 \leq\ \alpha^i_{xy}\ \leq \epsilon^d \quad .$$

Posons

$$h(u_1, u_2) \;=\; f_n(u_1, u_2, \ldots, u_2) \;=\; \epsilon^d \left(\frac{1+\epsilon(n-1)u_2}{1+\epsilon(u_1+(n-1)u_2)}\right)^d .$$

$$\begin{array}{rl} \text{Si} \quad \forall i\ ,\ \forall xy \in \vec{L}\ , & \underline{\alpha} \leq \alpha^i_{xy} \leq \overline{\alpha} \\ \text{alors } \forall i\ ,\ \forall xy \in \vec{L}\ , & h(\overline{\alpha},\underline{\alpha}) \leq \alpha^i_{xy} \leq h(\underline{\alpha},\overline{\alpha}) \quad . \end{array}$$

Soit en posant $q(u_1, u_2) = h(h(u_1, u_2), h(u_2, u_1))$,

$$\forall i\ ,\ \forall xy \in \vec{L}\ , \quad q(\underline{\alpha},\overline{\alpha}) \leq \alpha^i_{xy} \leq q(\overline{\alpha},\underline{\alpha}) \quad .$$

Nous pouvons encore définir des suites $(\alpha^1_m)_m$ et $(\alpha^2_m)_m$ respectivement croissante majorée et décroissante minorée.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha^1_0 & = & 0 \\ \alpha^2_0 & = & \epsilon^d \end{array} \right. \quad et \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha^1_m & = & q(\alpha^1_{m-1}, \alpha^2_{m-1}) \\ \alpha^2_m & = & q(\alpha^2_{m-1}, \alpha^1_{m-1}) \end{array} \right. \quad , \tag{5.40}$$

avec

$$\forall m\ ,\ \forall i\ ,\ \forall xy \in \vec{L}\ , \quad \alpha^1_m \leq \alpha^i_{xy} \leq \alpha^2_m \quad .$$

Ces suites convergent respectivement vers α_1 et α_2 avec (α_1, α_2) solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} q(\alpha_1, \alpha_2) - \alpha_1 & = & 0 \\ q(\alpha_2, \alpha_1) - \alpha_2 & = & 0 \end{array} \right. \quad . \tag{5.41}$$

Ce système a au moins une solution du type (α, α) avec $\alpha = F_n(\alpha)$ et F_n définie en (5.27) . Si cette solution est la seule solution de (5.41), il n'y a qu'une seule chaîne de Markov et qu'une seule mesure réversible pour le processus des philosophes sur $K_n \times T^r$. En fait si les suites convergent vers α_1 et α_2 avec $\alpha_1 = \alpha_2$, nous avons nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Contrairement aux deux cas précédents, les solutions de (5.41) ne correspondent pas à des chaînes de Markov (ni alternées ni autres). De fait elles ne correspondent pas non plus à des mesures extrémales. Nous pouvons ainsi obtenir une condition suffisante d'unicité de la mesure réversible sur $K_n \times T^r$. Comme pour la proposition 5.4.4, nous ne donnons pas une démonstration complète mais nous pensons que le résultat suivant est vrai.

Proposition 5.4.5 *Soit $n \geq 2$ et $d = r - 1$. Soit $\underline{\lambda}$ la valeur donnée par*

$$\underline{\lambda} = \underline{u} \left(\frac{1 + n\underline{u}}{1 + (n-1)\underline{u}} \right)^d ,$$

$$avec \quad \underline{u} = \frac{2n - 1 - d + \sqrt{\Delta}}{2(2d - n)(n - 1)} \quad et \quad \Delta = d^2 + 2d(2n - 3) + 1 \ .$$

Si $2d \leq n$, le processus des philosophes sur $K_n \times T^r$ a une unique mesure réversible.
Si $2d > n$ et $\lambda \leq \underline{\lambda}$, le processus des philosophes sur $K_n \times T^r$ a une unique mesure réversible.

Ebauche de démonstration. Pour $n = 2$ ce résultat est inclus dans la proposition 5.4.4 déjà donnée. Le principe de la démonstration est analogue à celui de cette proposition. Il suffit de remplacer g_2 par q et f_2 par h. Nous cherchons les valeurs de λ pour lesquelles le déterminant jacobien du système (5.41), pris en la solution $(\alpha(\lambda), \alpha(\lambda))$ s'annule. Ce déterminant se factorise en

$$\left(\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(\alpha,\alpha) + \frac{\partial h}{\partial u_2}(\alpha,\alpha)\right)^2 - 1\right)\left(\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(\alpha,\alpha) - \frac{\partial h}{\partial u_2}(\alpha,\alpha)\right)^2 - 1\right),$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{avec} & \dfrac{\partial h}{\partial u_1}(\alpha,\alpha) & = & \dfrac{-d\epsilon\alpha}{1+n\epsilon\alpha} \\ \text{et} & \dfrac{\partial h}{\partial u_2}(\alpha,\alpha) & = & -\dfrac{\partial h}{\partial u_1}(\alpha,\alpha)\dfrac{(n-1)\epsilon\alpha}{1+(n-1)\epsilon\alpha} . \end{array}$$

Il s'annule pour les couples (ϵ, α) vérifiant

$$d\epsilon\alpha(1+2(n-1)\epsilon\alpha) \quad = \quad (1+(n-1)\epsilon\alpha)(1+n\epsilon\alpha)$$

ou

$$d\epsilon\alpha \quad = \quad (1+(n-1)\epsilon\alpha)(1+n\epsilon\alpha) .$$

Nous cherchons donc les solutions des équations

$$(2d-n)(n-1)u^2 + (d-2n+1)u - 1 \quad = \quad 0 \tag{5.42}$$

$$\text{et} \quad n(n-1)u^2 + (2n-1-d)u + 1 \quad = \quad 0 . \tag{5.43}$$

Seule la plus petite des solutions positives nous intéresse. Si $2d \leq n$, (5.42) et (5.43) n'ont pas de solutions réelles positives. Il n'y a pas de valeur de λ pour laquelle le déterminant s'annule. Si $2d > n$, (5.42) a une solution positive,

$$\underline{u} \;=\; \frac{2n-1-d+\sqrt{\Delta}}{2(2d-n)(n-1)} \qquad \text{avec } \Delta = d^2 + 2d(2n-3) + 1 .$$

D'autre part, si (5.43) a des solutions réelles, elles vérifient

$$(2d-n)(n-1)u^2 + (d-2n+1)u - 1 \;>\; 0 . \tag{5.44}$$

Les solutions positives de (5.43) sont donc strictement supérieures à $\underline{u}$. Si $2d > n$, la plus petite valeur de bifurcation est donc

$$\underline{\lambda} = \underline{u}\left(\frac{1+n\underline{u}}{1+(n-1)\underline{u}}\right)^d .$$

Sous réserve que les limites des suites définies en (5.40) sont des fonctions continues de λ, des arguments analogues à ceux utilisés pour la proposition 5.4.4 nous permettent de conclure que si $2d \leq n$, pour tout λ, ces suites convergent vers $\alpha(\lambda)$ et il n'y a jamais transition de phase. En revanche, si $2d > n$, ces suites convergent vers $\alpha(\lambda)$ si $\lambda \leq \underline{\lambda}$.

■

D'autre part, dans la section 5.2 (proposition 5.2.1), pour $d \geq n \geq 2$, nous avons montré l'existence d'une valeur $\overline{\lambda}$ au-dessus de laquelle il n'y a pas unicité de la mesure réversible sur $K_n \times T^r$. Pour $n > 2$, les valeurs $\underline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}$ ne coïncident pas. Il est facile de voir que $\underline{\lambda} < \overline{\lambda}$. Cette inégalité est en effet équivalente à $\underline{u} < \frac{1}{d-n+1}$, qui est vérifiée car pour $n > 2$, l'inégalité (5.44) est vraie avec $u = \frac{1}{d-n+1}$. Pour $d \geq n > 2$, la valeur critique de transition de phase λ_c vérifie donc

$$\underline{\lambda} \leq \lambda_c \leq \overline{\lambda}\,.$$

Dans des cas vérifiant $2d > n$, nous avons estimé la valeur de λ au-dessous de laquelle les suites définies en (5.40) convergeaient vers la même limite. La figure 5.2 donne ces valeurs pour $n = 5$ et $d = 5\ldots 11$. Nous retrouvons des valeurs approchées de $\underline{\lambda}$ qui sont bien inférieures aux valeurs de $\overline{\lambda}$ correspondantes.

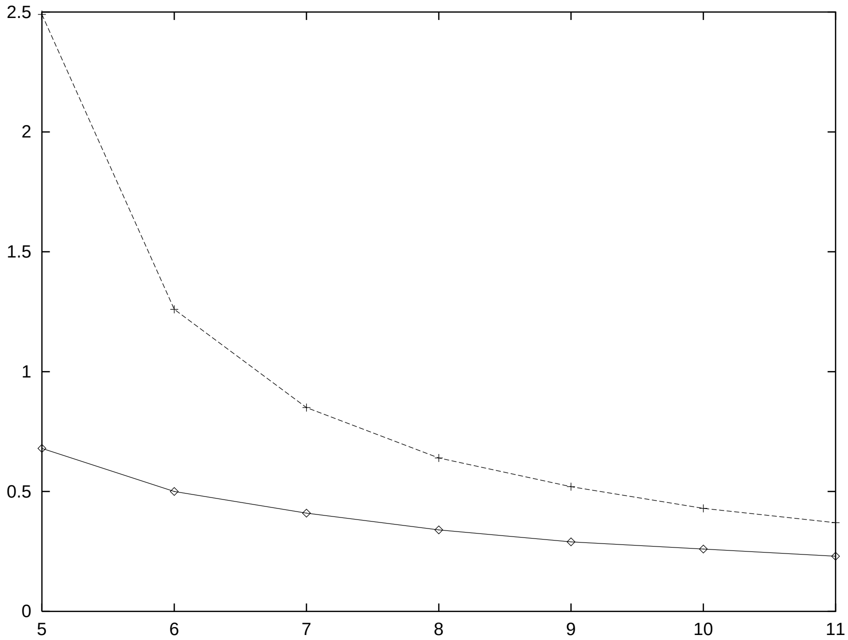


FIG. 5.2: Valeurs de $\underline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}$ pour $n = 5$ et $d = 5\ldots 11$.

En fait, pour $d \geq n \geq 2$ et $\lambda > \overline{\lambda}$, il existe plusieurs chaînes de Markov alternées. En effet, considérons celles dont les lois de bord sont de la forme

$$\mathcal{L}_p = (\alpha_p^1, \alpha_p^2 \ldots \alpha_p^2) \text{ et } \mathcal{L}_i = (\alpha_i^1, \alpha_i^2 \ldots \alpha_i^2)\,.$$

Elles correspondent aux solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & h(h(\alpha_1, \alpha_2), k(\alpha_1, \alpha_2)) \\ \alpha_2 & = & k(h(\alpha_1, \alpha_2), k(\alpha_1, \alpha_2)) \end{array} \right. \tag{5.45}$$

$$\text{avec} \quad k(\alpha_1, \alpha_2) \;=\; \epsilon^d \left(\frac{1 + \epsilon(\alpha_1 + (n-2)\alpha_2)}{1 + \epsilon(\alpha_1 + (n-1)\alpha_2)} \right)^d \,.$$

Ce système admet au moins une solution de la forme (α, α) qui correspond à l'unique point fixe de F_n. Considérons les solutions (α_1, α_2) avec $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Si

$$\underline{\alpha} \;\leq\; \alpha_1 \;\leq\; \alpha_2 \;\leq\; \overline{\alpha}$$

nous avons

$$\begin{aligned} h(\overline{\alpha}, \underline{\alpha}) \;&\leq\; h(\alpha_1, \alpha_2) \;\leq\; h(\underline{\alpha}, \overline{\alpha}) \\ k(\underline{\alpha}, \overline{\alpha}) \;&\leq\; k(\alpha_1, \alpha_2) \;\leq\; k(\overline{\alpha}, \underline{\alpha}) \;. \end{aligned}$$

D'où

$$h(h(\underline{\alpha}, \overline{\alpha}), k(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})) \;\leq\; \alpha_1 \;\leq\; \alpha_2 \;\leq\; k(h(\underline{\alpha}, \overline{\alpha}), k(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})) \;. \tag{5.46}$$

Définissons donc les suites

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_0^1 & = & 0 \\ \alpha_0^2 & = & \epsilon^d \end{array} \right. \quad et \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_m^1 & = & h(h(\alpha_{m-1}^1, \alpha_{m-1}^2), k(\alpha_{m-1}^1, \alpha_{m-1}^2)) \\ \alpha_m^2 & = & k(h(\alpha_{m-1}^1, \alpha_{m-1}^2), k(\alpha_{m-1}^1, \alpha_{m-1}^2)) \end{array} \right. \;. \tag{5.47}$$

Nous pouvons déduire de (5.46),

$$\forall m \geq 0 \;, \quad \alpha_m^1 \;\leq\; \alpha_1 \;\leq\; \alpha_2 \;\leq\; \alpha_m^2 \;.$$

Les suites $(\alpha_m^1)_m$ et $(\alpha_m^2)_m$ sont respectivement croissante majorée et décroissante minorée. Si leurs limites sont égales, il n'y a pas de chaînes de Markov alternées pour lesquelles $\alpha_1 < \alpha_2$. De même, nous pouvons montrer que pour $\alpha_0^1 = \epsilon^d$ et $\alpha_0^2 = 0$ les suites $(\alpha_m^1)_m$ et $(\alpha_m^2)_m$ définies par (5.47) convergent. Lorsque leurs limites sont égales, il n'y a pas de chaînes de Markov alternées pour lesquelles $\alpha_1 > \alpha_2$. Ainsi, sous ces deux conditions, les seules solutions de (5.45) sont de la forme (α, α) avec α point fixe de $F_n^{(2)}$. En particulier, si le point fixe de F_n n'est pas stable, il existe plus d'une chaîne de Markov alternée. Or nous pouvons remarquer que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_m^1 & = & \epsilon^d (1 - \beta_{2m})^d \\ \alpha_m^2 & = & \epsilon^d (1 - \gamma_{2m})^d \end{array} \right. \;, \tag{5.48}$$

où β_m et γ_m sont définis en (5.13). Nous en déduisons donc que pour $d \geq n \geq 2$ et $\lambda > \overline{\lambda}$, il existe plusieurs chaînes de Markov alternées. De la même manière, il est facile de voir que la suite $(a_m)_m$ définie en (5.9) correspond à des chaînes de Markov alternées dont les lois de bord sont de la forme

$$\mathcal{L}_p = (\alpha_p, \alpha_p \ldots \alpha_p) \;\text{ et }\; \mathcal{L}_i = (\alpha_i, \alpha_i \ldots \alpha_i) \;.$$

Comme précédemment, on peut définir

$$\alpha_m \;=\; \epsilon^d (\frac{n - 1 + a_{2m}}{n})^d \;.$$

Ceci explique que l'étude de β_m et γ_m donne de meilleures conditions de transition de phase que celle de a_m (voir section 5.2).

Enfin, mentionnons que dans le cas bipartite, il est possible de faire le lien entre l'unicité de la mesure réversible et l'ergodicité du processus en utilisant des techniques analogues à celles de [54] ou [51].

5.5 Transition de phase pour des PU sur des arbres

Dans cette section, nous nous contentons de donner un exemple de PU pour lequel il est possible de faire une étude analogue à celle de la section précédente. Nous reprenons le PU de la proposition 4.3.4 du chapitre 4. Plus précisément, nous considérons un tel PU sur T^r. Chaque utilisateur a accès à r ressources. L'une des ressources est dite de type "p" (père), les autres sont de type "f" (fils). L'occupation de la ressource de type "p" correspond à la quantité ρ_p, celle de l'ensemble des $r-1$ autres à la quantité ρ_f et celle des r ressources à ρ_{pf}. Un individu peut donc se trouver dans 4 états que nous notons $B = \{\emptyset, f, p, pf\}$. De plus, une ressource partagée par deux utilisateurs est de type "p" pour l'un et de type "f" pour l'autre. Cela correspond à une certaine orientation des arêtes de T^r. Nous notons $\vec{L}_r$ l'ensemble des arêtes de T^r orientées comme indiqué dans la figure 5.3.

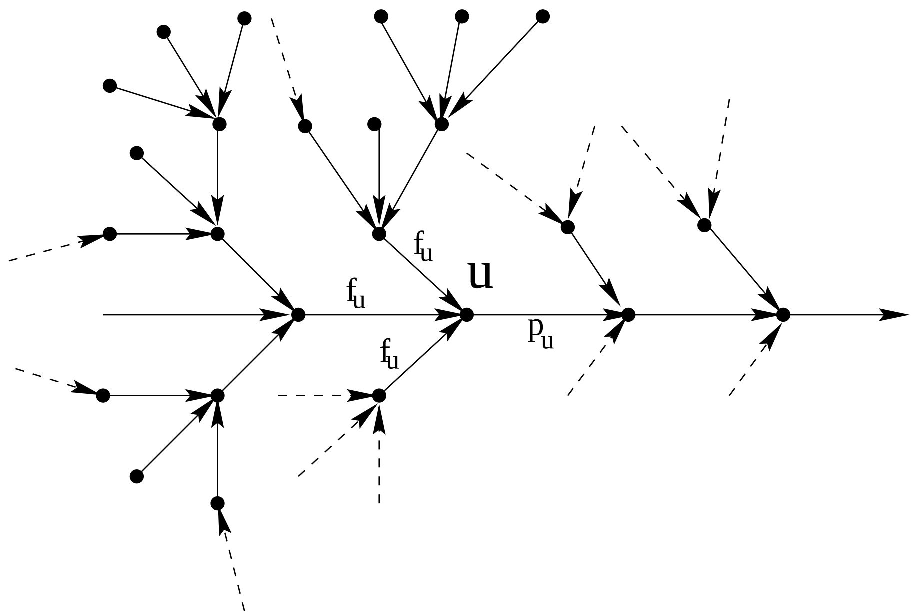


FIG. 5.3: Arêtes orientées de T^r appartenant à $\vec{L}_r$ $(r = 4)$.

Les mesures réversibles d'un tel PU sur T^r sont des champs de Markov pour lesquels nous pouvons définir une famille $Q = \{Q_{xy}\}_{xy \in \vec{L}}$ de matrices sur B. Nous avons,

$$\forall xy \in \vec{L}_r, \quad Q_{xy} \;=\; \mathcal{Q} \;=\; \left[\begin{pmatrix} 1 & \rho_f & \rho_p & \rho_{pf} \\ \rho_f & \rho_f^2 & \rho_f\rho_p & \rho_f\rho_{pf} \\ \rho_p & 0 & \rho_p^2 & 0 \\ \rho_{pf} & 0 & \rho_p\rho_{pf} & 0 \end{pmatrix}\right]^{(1/r)} . \tag{5.49}$$

Rappelons que si v est une matrice, nous notons $[v]^{(1/r)}$ la matrice dont les coefficients sont ceux de v à la puissance $1/r$. De manière symétrique,

$$\forall xy \in \vec{L} \backslash \vec{L}_r, \quad Q_{xy} \;=\; \mathcal{Q}^t . \tag{5.50}$$

Il est possible d'étendre la notion de spécification répulsive introduite dans la définition 5.3.3 à des spécifications de Markov non homogènes. Toutefois, comme pour le PP sur $K_n \times T^r$

avec $n \geq 3$, il semble qu'il n'existe pas d'ordre sur B tel que les matrices $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}^t$ définissent une spécification répulsive. Ici, il paraît plus simple d'étudier directement les lois de bord normalisées associées à $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}^t$.

Proposition 5.5.1 *Soit le PU sur T^r ($r \geq 2$) vérifiant (5.49) et (5.50). Posons $\Lambda = \rho_{pf} - \rho_p\rho_f$ et supposons ρ_{pf} strictement positif. Définissons la fonction*

$$F_d(u) \;=\; \left(\frac{1+\rho_f u}{1+\rho_p+(\rho_f+\rho_{pf})u}\right)^d .$$

Si $\Lambda < 0$, le processus a une unique mesure réversible.
Si $\Lambda > 0$, le processus a une unique mesure réversible si et seulement si $F_d^{(2)}$ a un unique point fixe.

Démonstration. Les chaînes de Markov sur T^r sont en bijection avec les lois de bord normalisées $l = \{l_{xy}\}_{xy\in\vec{L}}$. Plus précisément, notons $l_{xy} = (1, \alpha^1_{xy}, \alpha^2_{xy}, \alpha^3_{xy})$. Si $xy \in \vec{L}_r$, pour tout $z \in N(x)\backslash\{y\}$, $zx \in \vec{L}_r$ et $Q_{zx} = \mathcal{Q}$. Dans ce cas, l'équation (5.17) conduit à (avec $d = r-1$),

$$\forall xy \in \vec{L}_r,\quad \left\{\begin{array}{lcl} \alpha^1_{xy} &=& (\rho_f)^{\frac{d}{d+1}} \displaystyle\prod_{z\in N(x)\backslash\{y\}} \frac{1+(\rho_f)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^1_{zx}}{1+(\rho_f)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^1_{zx}+(\rho_p)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^2_{zx}+(\rho_{pf})^{\frac{1}{d+1}}\alpha^3_{zx}} \\ \alpha^2_{xy} &=& (\rho_p)^{\frac{d}{d+1}} \\ \alpha^3_{xy} &=& (\rho_{pf})^{\frac{d}{d+1}} \displaystyle\prod_{z\in N(x)\backslash\{y\}} \frac{1+(\rho_f)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^1_{zx}}{1+(\rho_f)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^1_{zx}+(\rho_p)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^2_{zx}+(\rho_{pf})^{\frac{1}{d+1}}\alpha^3_{zx}} \end{array}\right.$$

ce qui peut encore s'écrire, si $\rho_{pf} > 0$,

$$\forall xy \in \vec{L}_r,\quad \left\{\begin{array}{lcl} \alpha^1_{xy} &=& (\frac{\rho_f}{\rho_{pf}})^{\frac{d}{d+1}}\ \alpha^3_{xy} \\ \alpha^2_{xy} &=& (\rho_p)^{\frac{d}{d+1}} \\ \alpha^3_{xy} &=& (\rho_{pf})^{\frac{d}{d+1}} \displaystyle\prod_{z\in N(x)\backslash\{y\}} \frac{1+\rho_f(\rho_{pf})^{-\frac{d}{d+1}}\alpha^3_{zx}}{1+\rho_p+\rho_f(\rho_{pf})^{-\frac{d}{d+1}}\alpha^3_{zx}+(\rho_{pf})^{\frac{1}{d+1}}\alpha^3_{zx}} \end{array}\right. \tag{5.51}$$

En posant pour tout $xy \in \vec{L}_r$, $\alpha_{xy} = (\rho_{pf})^{-\frac{d}{d+1}}\alpha^3_{xy}$, l'équation (5.51) devient

$$\forall xy \in \vec{L}_r,\quad \alpha_{xy} \;=\; \prod_{z\in N(x)\backslash\{y\}} \frac{1+\rho_f\alpha_{zx}}{1+\rho_p+(\rho_f+\rho_{pf})\alpha_{zx}} . \tag{5.52}$$

Nous commençons donc par nous intéresser aux familles $\{\alpha_{xy}\}_{xy\in\vec{L}_r}$ qui vérifient (5.52). Considérons

$$F_d(u) \;=\; \left(\frac{1+\rho_f u}{1+\rho_p+(\rho_f+\rho_{pf})u}\right)^d ,$$

et posons $\Lambda = \rho_{pf} - \rho_p\rho_f$. Si $\Lambda < 0$, la fonction F_d est strictement croissante et l'étude de ses variations montre qu'elle admet un point fixe unique noté α. Considérons les suites

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha^1_0 &=& F_d(0) \\ \alpha^2_0 &=& F_d(\infty) \end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{lcl} \alpha^1_m &=& F_d(\alpha^1_{m-1}) \\ \alpha^2_m &=& F_d(\alpha^2_{m-1}) \end{array}\right. . \tag{5.53}$$

Les suites $(\alpha^1_m)_m$ et $(\alpha^2_m)_m$ sont respectivement croissante majorée et décroissante minorée. Elles convergent vers le point fixe α de F_d. De plus, en encadrant chaque terme dans (5.52), nous obtenons,

$$\text{si} \qquad \forall xy \in \vec{L}_r, \quad \underline{\alpha} \ \le \ \alpha_{xy} \ \le \ \overline{\alpha} \ ,$$

$$\text{alors } \forall xy \in \vec{L}_r, \quad F_d(\underline{\alpha}) \ \le \ \alpha_{xy} \ \le \ F_d(\overline{\alpha}) \ .$$

Nous en déduisons,

$$\forall xy \in \vec{L}_r, \ \forall m \ge 0, \quad \alpha^1_m \ \le \ \alpha_{xy} \ \le \ \alpha^2_m \ .$$

D'où, en passant à la limite,

$$\forall xy \in \vec{L}_r, \quad \alpha_{xy} = \alpha \ .$$

Nous nous intéressons à présent à l_{xy} pour $xy \in \vec{L}\backslash\vec{L}_r$. Si $xy \in \vec{L}\backslash\vec{L}_r$, il existe un unique $\tilde{z}$ dans $N(x)\backslash\{y\}$ tel que $\tilde{z}x \notin \vec{L}_r$. Pour $xy \in \vec{L}\backslash\vec{L}_r$, l'équation (5.17) implique

$$\forall xy \in \vec{L}\backslash\vec{L}_r, \quad l_{xy} \ = \ \frac{l_{\tilde{z}x}\mathcal{Q}^t}{l_{\tilde{z}x}\mathcal{Q}^t(\gamma)} \prod_{z\neq\tilde{z}} \frac{l_{zx}\mathcal{Q}}{l_{zx}\mathcal{Q}(\gamma)} \ .$$

Ci-dessus et dans ce qui suit, le produit porte sur $z \in N(x)\backslash\{y\}$. De plus, pour simplifier les écritures, nous posons

$$C \quad = \quad \prod_{z\neq\tilde{z}} \frac{1+(\rho_f)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^1_{zx}}{1+(\rho_f)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^1_{zx}+(\rho_p)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^2_{zx}+(\rho_{pf})^{\frac{1}{d+1}}\alpha^3_{zx}} \quad ,$$

$$\text{et} \quad C' \quad = \quad \frac{1+(\rho_p)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^2_{\tilde{z}x}}{1+(\rho_f)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^1_{\tilde{z}x}+(\rho_p)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^2_{\tilde{z}x}+(\rho_{pf})^{\frac{1}{d+1}}\alpha^3_{\tilde{z}x}} \quad .$$

Il vient

$$\forall xy \in \vec{L}\backslash\vec{L}_r, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha^1_{xy} & = & (\rho_f)^{\frac{d}{d+1}} \ C \\ \alpha^2_{xy} & = & (\rho_p)^{\frac{d}{d+1}} \ C' \\ \alpha^3_{xy} & = & (\rho_{pf})^{\frac{d}{d+1}} \ C \ C' \end{array} \right. \quad . \tag{5.54}$$

Si pour tout xy dans $\vec{L}_r$, nous avons $\alpha_{xy} = \alpha$, alors

$$\forall xy \in \vec{L}_r, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha^1_{xy} & = & (\rho_f)^{\frac{d}{d+1}} \ \alpha \\ \alpha^2_{xy} & = & (\rho_p)^{\frac{d}{d+1}} \\ \alpha^3_{xy} & = & (\rho_{pf})^{\frac{d}{d+1}} \ \alpha \end{array} \right.$$

et (5.54) se simplifie en $(\rho_{pf} > 0)$

$$\forall xy \in \vec{L}\backslash\vec{L}_r, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha^1_{xy} & = & (\rho_f)^{\frac{d}{d+1}} \ F_{d-1}(\alpha) \\ \alpha^2_{xy} & = & (\rho_p)^{\frac{d}{d+1}}(\rho_{pf})^{-\frac{d}{d+1}} \ F_{d-1}(\alpha)^{-1} \ \alpha^3_{xy} \\ \alpha^3_{xy} & = & (\rho_{pf})^{\frac{d}{d+1}} \ F_{d-1}(\alpha) \ \dfrac{1+(\rho_p)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^2_{\tilde{z}x}}{1+\rho_f F_{d-1}(\alpha)+(\rho_p)^{\frac{1}{d+1}}\alpha^2_{\tilde{z}x}+(\rho_{pf})^{\frac{1}{d+1}}\alpha^3_{\tilde{z}x}} \end{array} \right. \quad .$$

Comme précédemment, si nous posons pour tout $xy \in \vec{L} \backslash \vec{L}_r$, $\beta_{xy} = (\rho_{pf})^{-\frac{d}{d+1}} F_{d-1}(\alpha)^{-1} \alpha_{xy}^3$, la troisième équation ci-dessus est équivalente à

$$\forall xy \in \vec{L} \backslash \vec{L}_r, \quad \beta_{xy} = \frac{1 + \rho_p \beta_{\tilde{z}x}}{1 + \rho_f F_{d-1}(\alpha) + (\rho_p + \rho_{pf} F_{d-1}(\alpha))\beta_{\tilde{z}x}} . \tag{5.55}$$

Considérons la fonction

$$G_\alpha(u) = \frac{1 + \rho_p u}{1 + \rho_f F_{d-1}(\alpha) + (\rho_p + \rho_{pf} F_{d-1}(\alpha))u} .$$

Si $\Lambda < 0$, quelle que soit la valeur du point fixe α, la fonction G_α est strictement croissante et admet un unique point fixe noté β qui dépend de α. Comme pour F_d, nous en déduisons

$$\forall xy \in \vec{L} \backslash \vec{L}_r, \quad \beta_{xy} = \beta .$$

Ainsi, lorsque $\Lambda < 0$, il n'y a qu'une seule loi de bord $l = \{l_{xy}\}_{xy \in \vec{L}}$ vérifiant (5.17) et il n'existe qu'une mesure réversible.

Si $\Lambda > 0$, la fonction F_d est strictement décroissante et admet un point fixe unique α. Si

$$\forall xy \in \vec{L}_r, \quad \underline{\alpha} \leq \alpha_{xy} \leq \overline{\alpha} ,$$

nous avons aussi

$$\forall xy \in \vec{L}_r, \quad F_d(\overline{\alpha}) \leq \alpha_{xy} \leq F_d(\underline{\alpha}) .$$

Nous en déduisons

$$\forall xy \in \vec{L}_r, \ \forall m \geq 1, \quad \alpha_{2m-1}^1 \leq \alpha_{xy} \leq \alpha_{2m}^1 ,$$

où $(\alpha_m^1)_m$ est la suite définie en (5.53). Les sous-suites $(\alpha_{2m-1}^1)_m$ et $(\alpha_{2m}^1)_m$ convergent vers des points fixes de $F_d^{(2)}$. Si leurs limites sont égales, il s'agit du point fixe α de F_d et (5.52) n'a qu'une seule solution donnée par

$$\forall xy \in \vec{L}_r, \quad \alpha_{xy} = \alpha .$$

Dans ce cas, nous pouvons encore définir la fonction G_α. Si $\Lambda > 0$, elle est strictement décroissante et admet un point fixe unique. En raisonnant comme ci-dessus, si $G_\alpha^{(2)}$ a un unique point fixe, il vient encore

$$\forall xy \in \vec{L} \backslash \vec{L}_r, \quad \beta_{xy} = \beta .$$

Or l'étude de la fonction $G_\alpha^{(2)}(u) - u$ montre que c'est toujours le cas quel que soit le point fixe α de F_d. Ainsi, lorsque $F_d^{(2)}$ a un unique point fixe, il n'y a qu'une seule mesure réversible. Inversement si $F_d^{(2)}$ a deux points fixes distincts, il est possible de construire deux lois de bord distinctes qui correspondent à des mesures réversibles différentes.

■

Remarquons que lorsque $d = 1$, $F_d^{(2)}$ (d'une forme analogue à $G_\alpha^{(2)}$) a un seul point fixe. Nous retrouvons le fait qu'en dimension 1 il n'y a jamais transition de phase.

Dans le cas $\Lambda > 0$, nous pouvons préciser la proposition 5.5.1 en donnant des conditions de transition de phase qui portent sur les quantités ρ_f, ρ_p et ρ_{pf}.

Proposition 5.5.2 *Soit le PU sur T^r ($r \geq 3$) vérifiant (5.49) et (5.50). Posons $\Lambda = \rho_{pf} - \rho_p\rho_f$ et supposons Λ strictement positif. Si les conditions suivantes sont vérifiées,*

(i) $\rho_f > 0$

(ii) $(r-2)^2\rho_{pf} - r^2\rho_p\rho_f - 4(r-1)\rho_f > 0$

(iii) $2(r\Lambda - \sqrt{\Delta})^{r-1}\rho_f^r > (\rho_f + \rho_{pf})^{r-2}((r-2)\Lambda - \sqrt{\Delta})^{r-1}((r-2)\Lambda - 2\rho_f(1+\rho_p) - \sqrt{\Delta})$

(iv) $2(r\Lambda + \sqrt{\Delta})^{r-1}\rho_f^r < (\rho_f + \rho_{pf})^{r-2}((r-2)\Lambda + \sqrt{\Delta})^{r-1}((r-2)\Lambda - 2\rho_f(1+\rho_p) + \sqrt{\Delta})$

avec

$$\Delta = \Lambda((r-2)^2\rho_{pf} - r^2\rho_p\rho_f - 4(r-1)\rho_f) \, ,$$

alors il existe plusieurs mesures réversibles.
Si $\rho_f = 0$, une condition nécessaire et suffisante de transition de phase est

$$\frac{\rho_{pf}}{(1+\rho_p)^r} > \frac{1}{r-1}\left(\frac{r-1}{r-2}\right)^r \, .$$

Démonstration. Il suffit de montrer que sous les conditions de la proposition, le point fixe α de F_d n'est pas stable. Les sous-suites $(\alpha^1_{2m-1})_m$ et $(\alpha^1_{2m})_m$ ont alors des limites différentes et il existe plusieurs chaînes de Markov. Or,

$$F'_d(\alpha) \;=\; \frac{-(r-1)\alpha}{(1+\rho_f\alpha)(1+\rho_p+(\rho_f+\rho_{pf})\alpha)} \, .$$

Lorsque $\rho_f > 0$, α est instable si α est encadré par les deux racines (lorsqu'elles existent) du polynôme

$$\rho_f(\rho_f+\rho_{pf})u^2 + (2\rho_f(1+\rho_p) - (r-2)\Lambda)u + 1 + \rho_p \, .$$

Si $r \geq 3$ et si (ii) est vérifiée, ce polynôme a deux racines réelles positives r_1 et r_2 (avec $r_1 < r_2$). La fonction F_d est strictement décroissante et la condition $r_1 < \alpha < r_2$ est équivalente aux conditions $F_d(r_1) > r_1$ et $F_d(r_2) < r_2$. D'où les conditions (iii) et (iv) de la proposition.
Lorsque $\rho_f = 0$, α est instable si

$$\alpha > \frac{1+\rho_p}{(r-2)\rho_{pf}} \, ,$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\rho_{pf}}{(1+\rho_p)^r} > \frac{1}{r-1}\left(\frac{r-1}{r-2}\right)^r \, .$$

Dans ce cas, la fonction F_d est de la forme de la fonction F_1 définie en (5.30). De manière analogue, il est possible de montrer que la condition

$$\frac{\rho_{pf}}{(1+\rho_p)^r} \;\leq\; \frac{1}{r-1}\left(\frac{r-1}{r-2}\right)^r \tag{5.56}$$

est équivalente à l'existence d'un unique point fixe pour $F_d^{(2)}$. En particulier, si $\rho_p = \rho_f = 0$, nous retrouvons la proposition 5.4.3 pour le PP sur T^r. ■

Les conditions (i) à (iv) sont en particulier vérifiées lorsque ρ_{pf} est grand par rapport à ρ_p et ρ_f. Par exemple, pour $\rho_f = \rho_p = 1$ et $\rho_{pf} = 101$, il y a transition de phase pour le PU sur T^4. Ceci s'interprète assez naturellement car les utilisateurs qui ont tendance à occuper l'ensemble de leurs r ressources (ρ_{pf} grand) empèchent leurs voisins sur T^r de faire de même.

Conclusion

Les modèles markoviens de ressources partagées que nous avons présentés consistent en général en la donnée de trois informations. Ils sont construits à partir d'un ensemble d'utilisateurs U, d'un ensemble de ressources R et de la connaissance du comportement de chaque utilisateur pris isolément. Pour un utilisateur $u \in U$, ayant accès à un sous-ensemble R_u de ressources, ce comportement est décrit par un processus de Markov *individuel* à valeurs dans $\mathcal{P}(R_u)$ et dont les taux $\lambda_u(\alpha, \beta)$ sont supposés connus. A partir de ces données, deux points de vue peuvent être envisagés. Celui des utilisateurs consiste à construire un processus de Markov sur $\bigotimes_{u \in U} \mathcal{P}(R)$ en tronquant comme en (4.2) le produit direct des processus individuels. Cette troncature empêche le processus de sortir de l'ensemble des configurations admissibles dans lesquelles chaque ressource est occupée par au plus un utilisateur. Le Processus des Philosophes est un exemple simple d'une telle construction. Le point de vue des ressources est quant à lui illustré par le modèle de la bibliothèque présenté dans la section 4.1. Il s'agit de construire un processus de Markov sur $\mathcal{P}(R)$ par superposition de processus *locaux*. Une telle construction est très générale et nous avons montré sur l'exemple de la bibliothèque comment le partage des ressources pouvait être modélisé à travers la forme donnée aux taux de transition des processus locaux (voir les équations (4.21)).

Dans le point de vue des utilisateurs, les individus peuvent être représentés par des automates stochastiques à états finis et le partage des ressources se traduit par des synchronisations entre ces automates. Un premier objectif était d'analyser comment la manière de synchroniser les automates influe sur la nature de l'équilibre du système global. De cette analyse est ressortie une classe de modèles intéressants en pratique, les processus d'utilisateurs construits par troncature de processus individuels réversibles. Ces modèles ont une mesure d'équilibre à forme produit. En effet, si l'automate de base est réversible alors la famille d'automates synchronisés est encore réversible par un lemme de troncature que nous avons montré pour les systèmes de particules. Une suite naturelle est d'envisager le cas où l'automate de base n'est plus réversible. La famille d'automates indépendants (sans partage des ressources) a pour mesure d'équilibre le produit des mesures d'équilibre de chaque automate et on peut se demander s'il est possible de les synchroniser de manière à conserver une forme produit, eventuellement *matricielle*, par une sorte de lemme de troncature qui porterait sur des regroupements d'états.

Une autre extension intéressante de nos modèles serait de considérer que les demandes de ressources insatisfaites ne sont pas perdues mais stockées dans des files d'attente. Ceci a été envisagé dans [5] mais un autre point de départ pourrait être les travaux de B. Ycart sur des processus en environnement markovien.

Des perspectives à plus court terme peuvent encore être données. Dans le chapitre 5 nous avons abordé l'étude des phénomènes de transition de phase pour des processus d'utilisateurs. Nous avons mis en évidence de tels phénomènes pour le Processus des Philosophes sur des graphes obtenus en faisant le produit cartésien d'une clique et d'un arbre infini. Pour de tels modèles, il est possible de donner des conditions de transition de phase qui portent sur le taux λ du processus. Nous pouvons appliquer les mêmes techniques à des arbres échelles plus généraux. Nous envisageons de considérer le cas où l'échelon n'est plus une clique et plus particulièrement le cas où ce dernier est un cycle avec un nombre pair de sommets (graphes bipartites). D'autre part, des liens existent entre les modèles à particules dures (du type Processus des Philosophes) et la percolation. Nous pensons qu'il devrait être possible d'utiliser des résultats de ce domaine pour nos modèles ou inversement de déduire, des résultats du chapitre 5, des valeurs critiques de percolation.

Enfin, l'étude de l'équilibre des processus d'utilisateurs pourrait encore être complétée par une étude de la convergence vers cet équilibre, à travers, pour commencer, le calcul du spectre du Processus des Philosophes.

Pour ce qui est des processus de ressources, les suites à donner sont moins claires. Il nous semble que les outils généraux de comparaison stochastique que nous avons développés et utilisés dans ce cadre devraient donner lieu à des applications intéressantes dans d'autres domaines que celui des ressources partagées. Nous pensons en particulier à des développements autour de la fiabilité des systèmes où des propriétés de monotonie apparaissent naturellement.

Ces travaux font principalement appel à la théorie des processus de Markov mais il est clair que des connaissances dans d'autres disciplines telles que la théorie des graphes, la combinatoire énumérative, la mécanique statistique peuvent être utiles. Dans ces disciplines apparaissent des préoccupations identiques aux nôtres. Nous pensons en particulier aux liens qui peuvent exister entre les modèles de gaz à particules dures et certains objets combinatoires classiques tels que les animaux dirigés sur des réseaux et les séries en variables partiellement commutatives de X.G. Viennot. Il est également naturel de se demander si les outils probabilistes utilisés pour le Processus des Philosophes peuvent donner de nouveaux résultats en combinatoire. Par exemple, une généralisation du *problème des ménages* ou la mise au point d'un algorithme de type recuit simulé, pour la génération des sous-ensembles stables maximaux d'un graphe donné, seraient envisageables.

Bibliographie

[1] S. Asmussen and D. Edwards. Collapsibility and response variables in contingency tables. *Biometrika*, 70(3) :567–578, 1983.

[2] R. J. Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics.* Academic Press, 1982.

[3] R. Benedetti and J.J. Risler. *Real algebraic and semi-algebraic sets.* Hermann, 1990.

[4] C. Berge. *Graphes. 3ème édition.* Gauthier-villars, 1983.

[5] M. Brilman. *Evaluation de performances d'une classe de systèmes de ressources partagées.* PhD thesis, Univ. Grenoble, 1996.

[6] M. Bui. Tuning distributed control algorithms for optimal functioning. *Journal of Global Optimization*, 2 :177–199, 1992.

[7] K.M. Chandy and J. Misra. The drinking philosophers problem. *ACM TOPLAS*, 6(4) :632–646, 1984.

[8] K.M. Chandy and J. Misra. *Parallel program design : a foundation.* Addison-Wesley, Reading, 1988.

[9] G. Chartrand and L. Lesniak. *Graphs and Digraphs. Second edition.* Wadsworth & Brooks/Cole, Mathematics Series, 1986.

[10] C. Cocozza-Thivent and M. Roussignol. Techniques de couplage en fiabilité. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 31(1) :119–141, 1995.

[11] J. N. Darroch, S. L. Lauritzen, and T. P. Speed. Markov fields and log-linear interaction models for contingency tables. *The Annals of Statistics*, 8(3) :522–539, 1980.

[12] A. P. Dawid and S. L. Lauritzen. Hyper Markov laws in the statistical analysis of decomposable graphical models. *The Annals of Statistics*, 21(3) :1272–1317, 1993.

[13] J. de Rumeur. *Communications dans les réseaux de processeurs.* Masson, 1994.

[14] C. Dellacherie and P. A. Meyer. *Probabilités et potentiel. Chap. I à IV.* Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Strasbourg XV. Hermann, 1975.

[15] J. Dieudonné. *Eléments d'analyse 1.* Cahiers scientifiques, Fasicule XXVIII. Gaulthier-villars, 1969.

[16] E. W. Dijkstra. The structure of the multiprogramming system. *Comm. ACM*, 11 :341–346, 1968.

[17] M. Doisy. *Comparaison stochastique de réseaux de Petri markoviens.* PhD thesis, Univ. Pau, 1992.

[18] A. E. Ferdinand. A statistical mechanics approach to systems analysis. *IBM Journal of Research and Development*, september :539–547, 1970.

[19] F. Forbes. Propriétés de markov des champs aléatoires sur les graphes. Technical Report 17, Projet MAI, 1995.

[20] F. Forbes and O. François. Stochastic comparison for Markov processes on a product of partially ordered sets. *A paraître dans Statistics and Probability letters*, 1996.

[21] F. Forbes, O. François, and B. Ycart. Stochastic comparison for resource sharing models. Technical Report 22, projet MAI. Soumis à Markov Processes and Related Fields, IMAG Grenoble, France, 1996.

[22] F. Forbes and B. Ycart. Counting stable sets on Cartesian products of graphs. Technical Report 26, projet MAI. Soumis à Combinatorica, IMAG Grenoble, France, 1996.

[23] F. Forbes and B. Ycart. The philosophers process on ladder graphs. *Communications in Statistics-Stochastic Models*, 12.4, 1996.

[24] O. François. *Systèmes de spins synchronisés et modèle de Hopfield stochastique.* PhD thesis, Univ. Joseph Fourier, Grenoble, France, 1992.

[25] O. François. On particle models of software diffusion into a computer network. Technical Report 27, projet MAI, IMAG Grenoble, France, 1996.

[26] H.O. Georgii. *Gibbs Measures and Phase Transitions.* de Gruyter, Studies in Mathematics, 1988.

[27] X. Guyon. *Champs aléatoires sur un réseau.* Masson, 1993.

[28] G. Ioss and D.D. Joseph. *Elementary Stability and Bifurcation Theory.* Springer-Verlag, 1980.

[29] J. Keilson and A. Kester. Monotone matrices and monotone markov processes. *Stochastic Processes and Their Applications*, 5(3) :231–241, 1977.

[30] F. P. Kelly and B. D. Ripley. Markov Point Processes. *J. London Math. Soc*, (2), 15 :188–192, 1977.

[31] F.P. Kelly. *Reversibility and Stochastic Networks.* Wiley, London, 1979.

[32] F.P. Kelly. Stochastic models of computer communication systems. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 85 :379–395, 1985.

[33] F.P. Kelly. Loss networks. *Ann. Appl. Probab.*, 1 :319–378, 1991.

[34] P. B. Key. Optimal control and trunk reservation in Loss Networks. *Prob. Eng. Inf. Sci.*, 4 :203–242, 1990.

[35] D. Lehmann and M. O. Rabin. On the advantages of free choice : a symmetric and fully distributed solution to the Dining Philosophers Problem. In *8th annual ACM Symposium on principles of programming languages, Williamsburg VA*. J. White, R. Lipton Ed., 1981.

[36] T. M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer, New York, 1985.

[37] T. Lindvall. *Lectures on the coupling method*. Wiley, New York, 1992.

[38] G. M. Louth. *Stochastic Networks : Complexity, dependence and routing*. PhD thesis, Univ. Cambridge, 1990.

[39] A. W. Massey. Stochastic orderings for Markov processes on partially ordered spaces. *Math. Oper. Research*, 12(2) :350–367, 1987.

[40] J.C. Paumier. *Bifurcation. Méthodes numériques. Flambage de coques*. Stage des professeurs de classe préparatoires, ENSIMAG sept. 1990.

[41] E. Pinsky and Y. Yemini. A statistical mechanics of some interconnection networks. In *Performance 84*. Elsevier Science Publishers B.V., 1984.

[42] C. J. Preston. *Gibbs states on countable sets*. Cambridge Tracts in Mathematics 68. Cambridge University Press, 1974.

[43] B. Prum. *Processus sur un réseau et mesures de Gibbs*. Masson, 1986.

[44] R. Recoules. *Communication privée*, 1994.

[45] M. Rosenblatt. Functions of a Markov process that are Markovian. *J. of Math. and Mech.*, 8(4) :585–596, 1959.

[46] J. T. Sandefur. *Discrete Dynamical Systems. Theory and Applications*. Oxford University Press, 1990.

[47] F. Spitzer. Phase Transition in One-Dimensional Nearest-Neighbor Systems. *J. Functional Analysis*, 20 :240–255, 1975.

[48] D. Stoyan. *Comparison methods for queues and other stochastic models*. Wiley, London, 1983.

[49] Y.M. Suhov. Full random field describing states of a switching network. In *Fundamentals of teletraffic theory*, Proc. 3rd int. seminar on teletraffic theory. Univ. Moscow, 1984.

[50] P. Suomela. Construction of nearest neighbour systems. Mathematica Dissertationes 10, Annals Academiae scientiarum fennicae, Helsinki. Suomalainen Tiedeakatemia, 1976.

[51] J. van den Berg and J. E. Steif. Percolation and the hard-core lattice gas model. *Stoch. Proc. Applic.*, 49 :179–197, 1994.

[52] J. H. Van Lint and R. M. Wilson. *A course in combinatorics*. Cambridge University Press, 1992.

[53] N. N. Vorobev. Markov measures and Markov extensions. *Theor. Probability Appl.*, 8 :420–429, 1963.

[54] B. Ycart. The philosophers process : an ergodic reversible nearest particle system. *Ann. Appl. Probab.*, 3(2) :356–363, 1993.

[55] B. Ycart. Systèmes markoviens. *Cours de DEA, Université Joseph Fourier*, 1993.

[56] P. S. Yu, M. Dias, and S. S. Lavenberg. On the Analytical Modelling of Database Concurrency Control. *J. A.C.M.*, 40(4) :831–872, 1993.

[57] S. Zachary. Countable state space Markov random fields and Markov chains on trees. *Ann. Probab.*, 11(4) :894–903, 1983.

[58] S. Zachary. Bounded, attractive and repulsive Markov specifications on trees and on the one-dimensional lattice. *Stochastic Processes and their Applications*, 20 :247–256, 1985.

[59] A. Zenie. Colored stochastic Petri nets. In *International Workshop on Timed Petri Nets*, pages 262–271, Silver Springs, MD, 1986. IEEE Computer Society Press.